FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Primeiro Teste – 26 de Março de 2013

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere A, B e C subconjuntos de um conjunto S.

[2,0] (a) Use diagramas de Venn para representar os conjuntos:
$(A \cap B) \cup C$ e $(A' \cap B) \cap C$.

[3,0] (b) Mostre que $(A' \cap B) \cap C = (B \cap C) \setminus A$.

Mude de Folha

2. Seja $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Determine:

[1,5] (a) $\mathcal{P}(\mathcal{D})$.

[1,0] (b) $\bigcup \mathcal{D}$.

[1,0] (c) $\bigcap \mathcal{D}$.

[1,5] (d) $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Mude de Folha

3. Considere R e S relações de equivalência sobre o conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, tais que $Y/R = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ e tal que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de adjacências de S.

[1,5] (a) Indique Y/R^{-1}.

[1,0] (b) Indique Y/S.

[1,5] (c) Justifique se $(3, 2) \in R \circ S$ ou se $(3, 2) \in S \circ R$.

Mude de Folha

[2,0] **4.** Seja T uma relação de equivalência sobre um conjunto X. Mostre que:

$$\forall x, y, z \in X \quad (x, y) \in T \wedge (y, z) \notin T \Rightarrow (x, z) \notin T.$$

Mude de Folha

5. considere o c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}, \subseteq)$ e $E = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$. Determine, se existirem:

[2,0] (a) O supremo e o máximo de E.

[2,0] (b) O ínfimo e o mínimo de E.

Fim

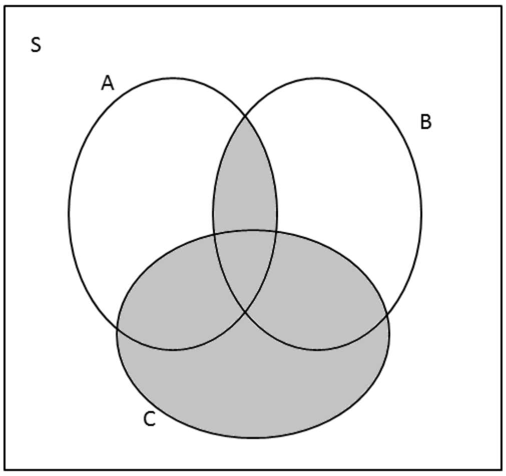
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

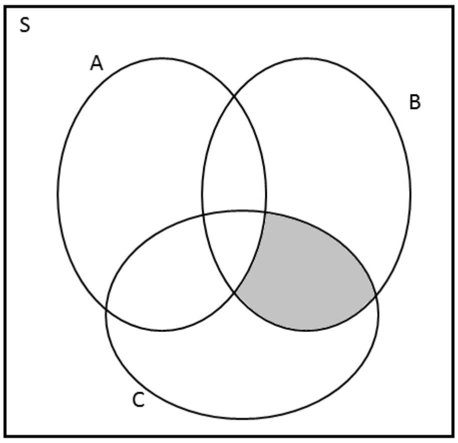
Primeiro Teste – 26 de Março de 2013

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) Uma representação do conjunto $(A \cap B) \cup C$, em diagrama de Venn é dada pela região sombreada da figura seguinte:



Uma representação do conjunto $(A' \cap B) \cap C$, em diagrama de Venn é dada pela região sombreada da figura seguinte:



(b) Usando tabelas de verdade temos

$(A'$	$\cap$	$B)$	$\cap$	C	$=$	$(B$	$\cap$	$C)$	$\setminus$	A
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
(2)	(3)	(1)	(4)	(1)	(5)	(1)	(3)	(1)	(4)	(1)

Alternativamente, podíamos demonstrar formalmente, provando que

$$x \in (A' \cap B) \cap C \quad \text{se e só se} \quad x \in (B \cap C) \setminus A.$$

Assim temos:

$$
\begin{array}{rcl}
x \in (A' \cap B) \cap C & \Leftrightarrow & \text{(definição de } \cap) \\
x \in (A' \cap B) \wedge x \in C & \Leftrightarrow & \text{(definição de } \cap) \\
(x \in A' \wedge x \in B) \wedge x \in C & \Leftrightarrow & \text{(definição de } X') \\
(x \notin A \wedge x \in B) \wedge x \in C & \Leftrightarrow & \text{(assoc. de } \wedge) \\
x \notin A \wedge (x \in B \wedge x \in C) & \Leftrightarrow & \text{(definição de } \cap) \\
x \notin A \wedge x \in (B \cap C) & \Leftrightarrow & \text{(definição de } \setminus) \\
x \in (B \cap C) \setminus A & &
\end{array}
$$

Concluímos, então, que $(A' \cap B) \cap C = (B \cap C) \setminus A$.

2. Dado $\mathcal{D} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, temos:

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \{\emptyset, \mathcal{D}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

(b) $\bigcup \mathcal{D} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

(c) $\bigcap \mathcal{D} = \emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$.

(d) $\mathcal{D} \times \mathcal{D} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\}), (\{\emptyset\}, \emptyset), (\{\emptyset\}, \{\emptyset\})\}$.

3. Tendo em consideração Y/R e a matriz de adjacências de S podemos afirmar que:

$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$ e

$S = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}$.

(a) Sabemos que $R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,3), (3,4), (4,4)\} = R$.
Logo, $Y/R^{-1} = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$.

(b) Atendendo aos elementos de S temos:
$[1]_S = \{1,3,4\} = [3]_S = [4]_S$ e
$[2]_S = \{2\}$.
Desta forma temos $Y/S = \{\{1,3,4\}, \{2\}\}$.

(c) Por definição de $R \circ S$, temos que $(3,2) \in R \circ S$ se existir $a \in Y$ tal que
$(3,a) \in S$ e $(a,2) \in R$.
Como $(3,1) \in S$ e $(1,2) \in R$, concluímos que $(3,2) \in R \circ S$.
Analogamente, por definição de $S \circ R$, temos que $(3,2) \in S \circ R$ se existir $a \in Y$ tal que
$(3,a) \in R$ e $(a,2) \in S$.
Como os únicos pares $(3,a)$ de R são $(3,3)$ e $(3,4)$ e, em S, só temos o par $(2,2)$ do tipo $(a,2)$, concluímos que $(3,2) \notin S \circ R$.

4. Como T é uma realação de equivalência sobre X então T é

- Reflexiva, isto é, $\forall x \in X, \quad (x,x) \in T$;
- Simétrica, isto é, $\forall x, y \in X, \quad (x,y) \in T \Rightarrow (y,x) \in T$;

- Transitiva, isto é, $\forall x, y, z \in X, \quad (x, y) \in T \wedge (y, z) \in T \Rightarrow (x, z) \in T$.

Queremos provar que

$$\forall x, y, z \in X \quad (x, y) \in T \wedge (y, z) \notin T \Rightarrow (x, z) \notin T.$$

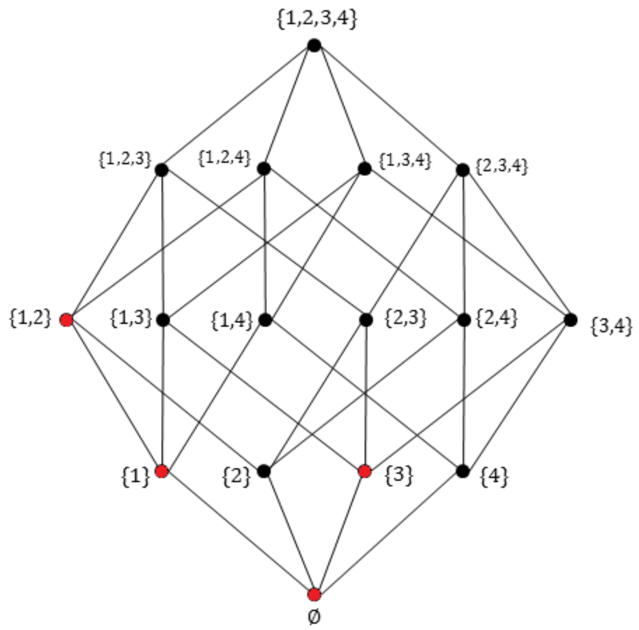
Suponhamos que existem $x, y, z \in T$ tais que $(x, y) \in T \wedge (y, z) \notin T$ e $(x, z) \in T$.

Dado que T é simétrica, se $(x, y) \in T$ então também $(y, x) \in T$.

Como T é transitiva e temos $(y, x) \in T$ e $(x, z) \in T$ podemos concluir que $(y, z) \in T$ o que contradiz a hipótese de $(y, z) \notin T$.

Logo, como queríamos provar, concluímos que $(x, z) \notin T$.

5. Considerando o c.p.o. $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}, \subseteq)$ e $E = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$ o diagrama de Hasse para estes conjuntos é dado por



Assim, temos:

(a) Supremo de $E = \{1, 2, 3\}$;

Máximo de E - não tem.

(b) Ínfimo de $E = \emptyset$;

Mínimo de $E = \emptyset$.