



Matemática Discreta

2º teste: Funções e indução

29 de Abril de 2013

Duração: 1 hora

1. Sejam $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ as funções

$$\psi(n) = n^2 \quad \text{e} \quad \phi(n) = n + 1$$

- (a) Determine o contradomínio da função ϕ . (1 valor)
- (b) Indique $\psi(\{1, 2\})$ e $\phi^{-1}(\{1, 2\})$. (2 valores)
- (c) Diga, justificando, se ψ é uma função injectiva. (1 valor)
- (d) Determine as funções compostas $\psi \circ \phi$ e $\phi \circ \psi$. (2 valores)

===== Mudar de folha =====

2. (a) Dê um exemplo de uma função injectiva que não seja sobrejectiva. Justifique a sua resposta. (2 valores)
- (b) Dê um exemplo de uma função sobrejectiva que não seja injectiva. Justifique a sua resposta. (2 valores)

===== Mudar de folha =====

3. Seja $\mathbb{W}_1$ o conjunto de todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{1\}$.

- (a) Defina $\mathbb{W}_1$ indutivamente e escreva as respectivas regras de inferência. (2 valores)
- (b) Mostre que $11 \in \mathbb{W}_1$, onde 11 abrevia $\text{conc}_1(\text{conc}_1(\epsilon))$. (1,5 valores)
- (c) Indique equações que definam recursivamente a função $\text{par} : \mathbb{W}_1 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se comprimento de } x \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(1,5 valores)

- (d) Usando a definição recursiva de *par* determinada na alínea anterior mostre, por indução, que:

$$\forall x \in \mathbb{W}_1 \quad \text{par}(x11) = \text{par}(x),$$

onde $x11$ abrevia $\text{conc}_1(\text{conc}_1(x))$. (1,5 valores)

===== Mudar de folha =====

4. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função definida recursivamente por $f(0) = 2$ e $f(n+1) = 3f(n) - 2$.

(a) Calcule $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$. (1,5 valores)

(b) Mostre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = 3^n + 1$. (2 valores)