



PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

1ª Parte

Responda, justificando adequadamente todas as respostas.

- (2.0) 1. Considere os acontecimentos A e B de um espaço de resultados Ω . Sabe-se que $P(A|B) = P(B|A)$, $P(A \cup B) = 0.7$ e $P(A \cap B) = 0.1$. Calcule o valor da $P(A)$.
- (4.0) 2. Num lote de 25 auto-rádios, sabe-se que 10 foram produzidos em Espanha e os restantes em Portugal.
- (a) Se seleccionar 3 auto-rádios desse lote, qual a probabilidade de 2 deles terem sido produzidos em Portugal?
 - (b) Sabe-se que 2.3% dos auto-rádios produzidos em Espanha contém um componente não homologado e que para os auto-rádios produzidos em Portugal este valor é de 1.2%. Determine a probabilidade de um auto-rádio, que tem o componente não homologado, ter sido produzido em Portugal.
 - (c) O tempo de “vida” de qualquer auto-rádio do lote, em anos, é uma variável aleatória X com distribuição Normal de valor médio 11 e desvio padrão 2. Qual a probabilidade de ser inferior a 262 anos, o tempo total de vida dos 25 auto-rádios?
- (4.0) 3. Seja (X, Y) um par aleatório, onde X representa o número diário de imóveis vendidos numa agência imobiliária e Y a v.a. definida por:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{se a agência imobiliária **não** fecha durante o horário de almoço;} \\ 1, & \text{se a agência imobiliária fecha durante o horário de almoço;} \end{cases}$$

Sabe-se que:

- X tem distribuição $B(2, 0.6)$ e os valores da v.a. Y ocorrem com a mesma probabilidade.
 - Os acontecimentos $\{X = 1\}$ e $\{Y = 0\}$ são independentes.
 - $P(X = 2, Y = 1) = 0.12$.
- (a) Construa a tabela da função de probabilidade conjunta e marginais associada ao par aleatório (X, Y) .
 - (b) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.
 - (c) Calcule $V(Y - 2X)$.
 - (d) Qual a probabilidade de venderem 2 imóveis, nos dias em que a agência não fecha durante o período de almoço?

FORMULÁRIO

	$P(X = k)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N, M, n)$	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq x \leq \min(M, n),$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

$Cov(a + bX, c + dY) = bd Cov(X, Y)$	
$Cov(aX + bY, cZ + dW) = ac Cov(X, Z) + ad Cov(X, W) + bc Cov(Y, Z) + bd Cov(Y, W)$	
$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathcal{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Distribuição de algumas estatísticas			
$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$
$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$			$Z = \frac{P-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$
$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$	$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \stackrel{a}{\sim} \chi_{k-p-1}^2$	

Regressão Linear Simples		
$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$	$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}$	$S_{YY} = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2$
$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$	$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$
$SQ_E = S_{YY} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = S_{YY} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx} \quad R^2 = 1 - \frac{SQ_E}{S_{YY}} = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} S_{YY}}$		
$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQ_E}{n-2} \quad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$	$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$	$T = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n S_{xx}} \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim t_{n-2}$
$T = \frac{\hat{\mu}_{Y x_0} - \mu_{Y x_0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \sim t_{n-2} \quad T = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \sim t_{n-2}$		



PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

2ª Parte

- (3.0) 4. Considere a amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de uma população com função densidade,

$$f(x) = a(1-x)^{a-1}, \quad 0 < x < 1, \quad a > 0.$$

- (a) Determine a função de distribuição de X .
- (b) Verifique que $E(X) = \frac{1}{1+a}$. Sugestão: determine $E(1-X)$.
- (c) Determine o estimador de a usando o método dos momentos.

- (4.0) 5. Suponhamos que é habitualmente aceite que a altura (medida em cm) de determinada cultivar de milho é uma v.a. normal com média 200 e variância desconhecida. Um certo experimentador pensa que a afirmação feita quanto ao valor médio está errada e decide implementar uma experiência que lhe permita testar tal hipótese. Planta então um talhão com a referida cultivar de milho, de onde amostra aleatoriamente 8 plantas. As suas alturas (em cm) eram

198.5 205.5 195.0 190.0 186.5 192.5 191.0 189.5

- (a) Face ao cenário acima, estabeleça as hipóteses nula e alternativa. Teste as hipóteses ao nível de significância 5%.
- (b) Determine um intervalo de confiança a 90% para a variância populacional.

- (4.0) 6. Numa investigação sobre propriedades duma borracha sintética, supõe-se que a perda de abrasividade da borracha (Y) está linearmente relacionada com a sua dureza (x).

Perda de abrasividade (g./h.p.-hora)	206	154	136	112	55	45	221	166	113	82
Dureza (I.R.H. (shore) units)	55	66	71	71	81	86	53	60	68	79

$$S_{xx} = 1084; \quad \sum y_i = 1290; \quad \sum y_i^2 = 198132; \quad \sum x_i y_i = 83262; \quad SQ_E = 1242.753;$$

- (a) Ajuste um modelo de regressão linear simple aos dados.
- (b) Que valor de perda de abrasividade prevê, para uma borracha cuja dureza é 72?
- (c) Teste a hipótese da recta de regressão passar na origem. Considere um nível de significância de 1%.
- (d) Prove que, em qualquer modelo de regressão linear, a soma dos erros é zero, isto é, prove que $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$.