UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Ano lectivo 2007/2008
Exame - 25 de Junho de 2008

Probabilidades e Estatística

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

1. (a) Considere o acontecimento A_{II}: "O cliente A atribui a classificação II a uma caixa" e a v.a. $X =$ "número de peças com defeito numa amostra de 5 peças". $X \sim Bin(5, 0.2)$.
$P(A_{II}) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 0.26272 \simeq 0.27$
(b) Sejam L_A e L_B as v.a.'s que representam o lucro da fábrica, em u.m., por cada caixa vendida aos compradores A e B, respectivamente. Temos
$$L_A \left\{ \begin{array}{cc} 6 & 10 \\ 0.27 & 0.73 \end{array} \right. \qquad L_B \left\{ \begin{array}{cc} 6 & 10 \\ 0.32 & 0.68 \end{array} \right.$$
Logo $E(L_A) = 8.92$, $E(L_B) = 8.72$, $V(L_A) = 3.15$, $V(L_B) = 3.48$.

2. (a) $P(X_B > 17) = 0.9332 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_B = 2.$
(b) A probabilidade do algoritmo A demorar menos tempo, do que o algoritmo B é
$$P(X_A < X_B) = \Phi(0.37) = 0.6443$$
Devemos implementar o algoritmo A.
(c) Como $P(X_A \leq 23) = 0.8413$ e $P(X_B \leq 23) = 0.9332$, devemos implementar o algoritmo B.

3. (a) Pretende-se testar:
$$H_0 : \mu \leq 9 \quad vs. \quad H_1 : \mu > 9$$
Como a população tem distribuição normal, de variância desconhecida, vamos utilizar a estatística de teste:
$$T = \frac{\overline{X} - 9}{S/\sqrt{8}} \underset{sob\, H_0}{\sim} t_7.$$
Obtemos $t_{obs} = 0.96$ e $R_{0.05} =]1.89, +\infty[$. Logo, não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.
(b) valor-p$= P(T > t_{obs}) \simeq P(T > 0.896) = 0.2$.

4. (a) $\hat{y} = 119.54 + 552.33x$
(b) Como $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{SQ_E}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$ e $n = 12$,
$$P\Big(\chi^2_{10,0.95} < \tfrac{10\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \chi^2_{10,0.05}\Big) = P\Big(\tfrac{10\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{10,0.05}} < \sigma^2 < \tfrac{10\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{10,0.95}}\Big) = 0.90.$$
Para esta amostra, $SQ_E = 10$, $\hat{\sigma}^2 = 2026.498$, e $IC_{90\%}(\sigma^2) =]110.74\ ,\ 514.34[$.

5. (a) O estimador dos momentos é $\hat{\alpha} = \frac{3}{2}\overline{X}$. Como $V(\hat{\alpha}) = \frac{9}{4}V(\overline{X}) = \ldots = \frac{\alpha^2}{8n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\hat{\alpha}$ é um estimador consistente.
(b) Como $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, resulta que $V(Z) = \frac{83}{9}$ e $Cov(Z, Y) = V(Y) = 9$.
(c)
$$F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1 \end{array} \right.$$
$P(X < 3/4 | X > 1/4) = \frac{8}{15}$.
(d) Seja $u \in]0, 1[$. Então, $F(x) = u \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{u}, \quad 0 < u < 1.$
Uma possível escolha para os números pseudo-aleatórios é,
$$x_1 = \sqrt{0.2517} = 0.5017$$
$$x_2 = \sqrt{0.7437} = 0.8624$$