



PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Responda, justificando adequadamente todas as respostas.

- (3.5) 1. Uma fábrica produz peças, que depois vende em caixas de 100 unidades. Dois compradores classificam as caixas adquiridas, nas categorias I e II, pagando por cada caixa 12 e 8 u.m. respectivamente. As caixas são classificadas do seguinte modo: o comprador A retira uma amostra de cinco peças, se encontrar mais que uma defeituosa atribui a classificação II, caso contrário atribui classificação I; o comprador B retira uma amostra de dez peças, se encontrar mais que duas defeituosas atribui a classificação II, caso contrário atribui classificação I. Admita que $1/5$ das peças produzidas pela fábrica têm defeito.

- (a) Calcule a probabilidade do comprador A atribuir, a uma caixa de peças, a classificação II.
- (b) Admita que o custo de produção de cada caixa é 2 u.m.. Em média qual dos compradores oferece o maior lucro (por cada caixa vendida)? E qual o comprador que apresenta uma menor variabilidade de lucro?

- (4.0) 2. Considere dois algoritmos A e B , de ordenação de vectores de k elementos (considere k fixo). O tempo que os algoritmos demoram, até concluir a ordenação de um vector, tem distribuição $N(18, 25)$ e $N(20, \sigma_B^2)$, respectivamente.

- (a) Sabendo que a probabilidade do algoritmo B demorar mais de 17 minutos é 0.9332, determine σ_B . [Caso não consiga resolver esta alínea, considere no que se segue $\sigma_B = 2$].
- (b) Se necessitar de implementar apenas um dos algoritmos, qual escolheria? Justifique.
- (c) Se considerarmos que o tempo de execução do algoritmo não deverá ultrapassar os 23 minutos, implementaria o mesmo algoritmo? Justifique.

- (3.5) 3. Um Agricultor afirma que a utilização da ração A , permite criar leitões com peso médio superior a 9Kg. Uma amostra de 8 animais, alimentados com base na ração A , que forneceu os seguintes pesos (em kg):

8.3 10 8.5 8 9.6 10.2 9.8 10

Admita que o peso dos leitões segue uma distribuição normal.

- (a) Teste ao nível de significância 5% se o referido Agricultor tem razão.
- (b) Calcule o valor-p, do teste realizado na alínea anterior.

- (4.5) 4. Pretende-se estudar a possível relação, entre o comprimento x (em centímetros) de um filamento de uma lâmpada incandescente e o seu tempo de “vida” Y (em horas). Recolheu-se a amostra:

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	1
Y	210	283	341	418	448	465	507	500	565	570	625	645

$$S_{YY} = 198036.25 \quad \sum x_i = 7.5 \quad \sum x_i^2 = 5.33 \quad \sum x_i Y_i = 3840.5$$

- (a) Estime os parâmetros do modelo de regressão linear simples.
- (b) Deduza e calcule um intervalo de 90% de confiança para σ^2 .
- (c) Considere o modelo de regressão linear simples, $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Demonstre que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i = \bar{Y}$.

- (4.5) 5. Considere a v.a. X com função densidade, $f(x) = \frac{2}{\alpha^2}x$, $0 < x < \alpha$.
- (a) Sabendo que $E(X + 1) = \frac{2\alpha+3}{3}$, determine o estimador de α , usando o método dos Momentos. Verifique se é consistente.
- Considere $\alpha = 1$ nas restantes alíneas.
- (b) Considere a v.a. Y com distribuição exponencial de valor médio 3. Sabendo que $E(XY) = 2$, calcule $V(Z)$ e $Cov(Z, Y)$, com $Z = Y - 2X$.
- (c) Determine a função de distribuição e utilize-a para calcular $P(X < 3/4 | X > 1/4)$.
- (d) Sejam $u_1 = 0.2517$ e $u_2 = 0.7437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0, 1)$. Usando o método da Transformação Inversa, calcule dois números pseudo-aleatórios da v.a. X . Nota: Caso não tenha determinado a função de distribuição, considere que $P(X \leq x) = 1 - (1 - x)^2$, $0 < x < 1$.

FORMULÁRIO

	$P(X = k)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$U(n)$	$\frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad 0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N, M, n)$	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(M, n)$	$n \frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Distribuição de algumas estatísticas			
$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$
$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$			$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$
$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$	$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi_{k-p-1}^2$	

Regressão Linear Simples			
$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$	$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}$	$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2$	
$SQ_E = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \quad R^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx} S_{yy}}$	$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$	
$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQ_E}{n-2} \quad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-2}^2$	$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$	$T = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n S_{xx}} \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim t_{n-2}$	
$T = \frac{\hat{\mu}_{Y x_0} - \mu_{Y x_0}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \sim t_{n-2}$		$T = \frac{Y_0 - \hat{Y}_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \sim t_{n-2}$	