FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA
Exame - 26 de Junho de 2009
Duração: 2h30

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

(5.0) 1. Considere a seguinte amostra, de dimensão $n = 30$, do número de clientes atendidos por hora em certo posto de venda:

41	30	28	40	28	26	28	41	30	34	40	36	30	20	43
35	36	20	42	43	42	40	32	26	28	41	34	24	42	40

Nos testes que tiver de fazer, considere um nível de significância de 5%.

(a) Estime pontualmente a proporção de horas em que são atendidos mais de 36 clientes.

(b) Deduza e calcule um intervalo de 90% de confiança para o parâmetro estimado na alínea anterior.

(c) Podemos considerar a amostra aleatória?

(d) Calcule o valor-p do teste realizado na alínea anterior.

Solução:

(a) $\hat{p} = \frac{12}{30} = 0.4$

(b) A dedução do IC encontra-se na sebenta.
$IC_{90\%}(p) =]0.253\ ;\ 0.547[$

(c) Pretende-se testar: H_0 : A amostra é aleatória vs H_1 : A amostra não é aleatória.
Estatística de teste: $Z = \frac{V-(2n-1)/3}{\sqrt{((16n-29)/90)}} \underset{Sob\,H_0}{\sim} N(0,1)$.
Temos $v_{obs} = 17$ e $z_obs = -1.19$.
Região de rejeição do teste: $R_{0.05} =]-\infty; -1.96[\cup]1.96; +\infty[$ Logo não se rejeita H_0 ao nível de significância 5%.

(d) $valor - p = 2\min(P(Z < -1.19|H_0), P(Z > -1.19|H_0)) = 0.23$

(3.0) 2. Pretende-se modelar o peso de pintos Y, em gramas, com a idade x, em semanas. Para tal registaram-se 10 valores da idade e o correspondente peso.

Idade, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso, Y	60	100	120	150	200	210	310	320	330	360

$$S_{YY} = 105040 \qquad \sum x_i^2 = 385 \qquad \bar{x} = 5.5 \qquad \sum Y_i x_i = 14780$$

(a) Estime os parâmetros da recta de regressão linear simples, e a variância dos erros, σ^2.

(b) Estime o peso de um pinto a meio da 8ª semana, isto é, quando $x = 8.5$.

(c) Teste a hipótese de o verdadeiro declive da recta de regressão ser nulo, a 5% de significância.

Solução:

(a) $\hat{\beta}_0 = 22.667$, $\hat{\beta}_1 = 35.152x$, $\hat{\sigma}^2 = 387.58$.

(b) $\hat{Y}(8.5) = 22.667 + 35.152 \times 8.5 = 321.459$.

(c) $H_0 : \beta_1 = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$
Estatística de teste:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \underset{Sob\,H_0}{\sim} t_{n-2}$$

Região de rejeição do teste:

$$R_{0.05} =]-\infty; -t_{8,0.025}[\cup]t_{8,0.025}; +\infty[=]-\infty; -2.31[\cup]2.31; +\infty[$$

Como $t_{obs} = 16.218 \in R_{0.05}$, rejeita-se H_0 ao nível de significância 5%.

(4.0) 3. A proporção de sumo de pêssego existente numa garrafa de *Ice Tea* de pêssego, é uma variável aleatória X com função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}, & 0 < x \leq \theta, \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta}, & \theta < x < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } x; \end{cases}$$

em que $\theta \in]0,1[$ é um parâmetro desconhecido. Sabe-se que $E(X) = \frac{1+\theta}{3}$ e $V(X) = \frac{1-\theta+\theta^2}{18}$.

(a) Determine o estimador de θ, usando o método dos Momentos.

(b) Admitindo que o estimador obtido na alínea anterior é centrado, verifique se também é consistente.

(c) A partir de 5 garrafas de *Ice Tea*, provenientes de lotes diferentes, obtiveram-se as seguintes proporções de sumo de pêssego: 0.29, 0.37, 0.42, 0.35, 0.44. Estime o parâmetro θ.

(d) Considere $\theta = \frac{1}{5}$. Determine:

i. a função de distribuição de X.

ii. a moda de X.

iii. o coeficiente de variação de X.

Solução:

(a) O estimador dos momentos é dado pela solução da equação $E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \theta = 3\bar{X} - 1$, isto é

$$\hat{\Theta} = 3\bar{X} - 1.$$

(b) $V(\hat{\Theta}) = \frac{9V(X)}{n} = \frac{1-\theta+\theta^2}{2n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Logo $\hat{\Theta}$ é consistente.

(c) Como $\bar{x} = 0.374$, a estimativa de θ é $\hat{\theta} = 3 \times 0.374 - 1 = 0.122$.

(d)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 5x^2, & 0 < x \leq 1/5; \\ 1 - \frac{5}{4}(1-x)^2, & 1/5 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

moda=1/5 CV=54.006%

(4.0) 4. O Ministério do Ambiente recorre a imagens de satélite para monitorizar a área ardida. Para cada parcela de terreno (que pode ter ardido ou não) é calculado um determinado índice, a partir da informação adquirida pelo sensor do satélite. O valor deste índice é uma variável aleatória **Normal** que no caso de parcelas não ardidas se admite ter valor médio 2 e desvio padrão 5 e para parcelas ardidas se admite ter valor médio 8 e desvio padrão c. Considera-se a parcela ardida, quando o sensor calcula um índice de valor superior a 5.

(a) Sabendo que numa parcela ardida, a probabilidade do valor do índice ser superior a 5 é igual a 0.8413, determine c.

(b) Qual é a probabilidade de, numa parcela não ardida, o sensor calcular um valor do índice superior a 5?

(c) Considere que a proporção total de parcelas ardidas é 6%. Qual a probabilidade de uma parcela escolhida ao acaso ser registada pelo sensor como ardida?

Solução:

(a) $\Phi(\frac{5-8}{c}) = 0.1587 \Leftrightarrow 1 - \Phi(\frac{3}{c}) = 0.1587 \Leftrightarrow c = 3$.

(b) Seja X o índice de uma parcela não ardida. $P(X > 5) = 1 - \Phi(0.6) = 0.2743$.

(c) Considerando os acontecimentos A : parcela ardida e S : o sensor regista a parcela como ardida, $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|\overline{A})P(\overline{A}) = 0.308$

(4.0) 5. (a) O número de pessoas envolvidas num acidente rodoviário tem distribuição **Geométrica** com parâmetro 1/3. Calcule a probabilidade de num acidente rodoviário estarem envolvidas pelo menos 3 pessoas.

(b) Considere a variável aleatória X com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} e^{5(x-1)}, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

Sejam $u_1 = 0.1517$ e $u_2 = 0.6437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0,1)$. Usando o método da Transformação Inversa, calcule dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X.

Solução:

(a) Seja X o nº de pessoas envolvidas num acidente rodoviário. $P(X \geq 3) = 1 - P(X=1) - P(X=2) = 4/9$.

(b) Seja u um NPA da distribuição $U(0,1)$. Como $F(x) = u \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\ln u}{5}$, $0 < u < 1$, os NPA's obtidos pelo método da transformação inversa são: 0.6228 e 0.9119.