FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Probabilidades e Estatística

Exame - 26 de Junho de 2009

Duração: 2h30

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

(5.0) 1. Considere a seguinte amostra, de dimensão $n = 30$, do número de clientes atendidos por hora em certo posto de venda:

41	30	28	40	28	26	28	41	30	34	40	36	30	20	43
35	36	20	42	43	42	40	32	26	28	41	34	24	42	40

Nos testes que tiver de fazer, considere um nível de significância de 5%.

(a) Estime pontualmente a proporção de horas em que são atendidos mais de 36 clientes.

(b) Deduza e calcule um intervalo de 90% de confiança para o parâmetro estimado na alínea anterior.

(c) Podemos considerar a amostra aleatória?

(d) Calcule o valor-p do teste realizado na alínea anterior.

(3.0) 2. Pretende-se modelar o peso de pintos Y, em gramas, com a idade x, em semanas. Para tal registaram-se 10 valores da idade e o correspondente peso.

Idade, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso, Y	60	100	120	150	200	210	310	320	330	360

$$S_{YY} = 105040 \qquad \sum x_i^2 = 385 \qquad \bar{x} = 5.5 \qquad \sum Y_i x_i = 14780$$

(a) Estime os parâmetros da recta de regressão linear simples, e a variância dos erros, σ^2.

(b) Estime o peso de um pinto a meio da 8ª semana, isto é, quando $x = 8.5$.

(c) Teste a hipótese de o verdadeiro declive da recta de regressão ser nulo, a 5% de significância.

(4.0) 3. A proporção de sumo de pêssego existente numa garrafa de *Ice Tea* de pêssego, é uma variável aleatória X com função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}, & 0 < x \leq \theta, \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta}, & \theta < x < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } x; \end{cases}$$

em que $\theta \in]0, 1[$ é um parâmetro desconhecido. Sabe-se que $E(X) = \frac{1+\theta}{3}$ e $V(X) = \frac{1-\theta+\theta^2}{18}$.

(a) Determine o estimador de θ, usando o método dos Momentos.

(b) Admitindo que o estimador obtido na alínea anterior é centrado, verifique se também é consistente.

(c) A partir de 5 garrafas de *Ice Tea*, provenientes de lotes diferentes, obtiveram-se as seguintes proporções de sumo de pêssego: 0.29, 0.37, 0.42, 0.35, 0.44. Estime o parâmetro θ.

(d) Considere $\theta = \frac{1}{5}$. Determine:

i. a função de distribuição de X.

ii. a moda de X.

iii. o coeficiente de variação de X.

(4.0) 4. O Ministério do Ambiente recorre a imagens de satélite para monitorizar a área ardida. Para cada parcela de terreno (que pode ter ardido ou não) é calculado um determinado índice, a partir da informação adquirida pelo sensor do satélite. O valor deste índice é uma variável aleatória **Normal** que no caso de parcelas não ardidas se admite ter valor médio 2 e desvio padrão 5 e para parcelas ardidas se admite ter valor médio 8 e desvio padrão c. Considera-se a parcela ardida, quando o sensor calcula um índice de valor superior a 5.

(a) Sabendo que numa parcela ardida, a probabilidade do valor do índice ser superior a 5 é igual a 0.8413, determine c.

(b) Qual é a probabilidade de, numa parcela não ardida, o sensor calcular um valor do índice superior a 5?

(c) Considere que a proporção total de parcelas ardidas é 6%. Qual a probabilidade de uma parcela escolhida ao acaso ser registada pelo sensor como ardida?

(4.0) 5. (a) O número de pessoas envolvidas num acidente rodoviário tem distribuição **Geométrica** com parâmetro 1/3. Calcule a probabilidade de num acidente rodoviário estarem envolvidas pelo menos 3 pessoas.

(b) Considere a variável aleatória X com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} e^{5(x-1)}, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

Sejam $u_1 = 0.1517$ e $u_2 = 0.6437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0,1)$. Usando o método da Transformação Inversa, calcule dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X.

Formulário

	$P(X=x)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad x=1,\ldots,n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,\ldots,n, \quad 0<p<1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\ldots, \quad 0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N,M,n)$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0,n-N+M) \leq x \leq \min(M,n)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots, \quad \lambda>0$	λ	λ
$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$Gama(\alpha,\lambda)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \alpha>0, \quad \lambda>0$ $F(x) = 1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad x>0, \quad \alpha\in\mathbb{N}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$			$Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$Z = \frac{V-\frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$		$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$

$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{x}^2$	$S_{xY} = \sum_{i=1}^{n}x_iY_i - n\overline{x}\overline{Y}$	$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n}Y_i^2 - n\overline{Y}^2$
$SQ_R = S_{YY} - \frac{S_{xY}^2}{S_{xx}} \qquad R^2 = \frac{S_{xY}^2}{S_{xx}S_{YY}}$	$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x}$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{SQ_R}{n-2} \qquad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$	$T = \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$	$T = \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}} \sim t_{n-2}$