FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA
Exame de Recurso - 17 de Julho de 2009
Duração: 2h30

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

(3.5) 1. Considere a variável aleatória X com função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Determine o valor k e $E(X)$.

(b) Sabendo que $E(X^2) = 4/5$, determine $V(2X-1)$.

(c) Considere A o acontecimento $X > \frac{1}{2}$; B o acontecimento $X < \frac{3}{4}$; Calcule $P(B|A)$.

Solução:

(a) Tendo em conta as propriedades da função densidade de probabilidade, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} k(1+x^2)dx = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}.$$

Pela definição de valor médio tem-se $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{8}(x+x^3)dx = 0$.

(b) $V(2X-1) = 2^2V(X) = 4(E(X^2) - E^2(X)) = 4(\frac{4}{5} - 0^2) = 16/5$.

(c)

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4})}{P(X > \frac{1}{2})} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{3}{8}(1+x^2)dx}{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{8}(1+x^2)dx} = \frac{\frac{67}{512}}{\frac{19}{64}} = 0.4407895.$$

(4.0) 2. A Ana, o Bruno e a Carlota concorrem em equipa a um concurso televisivo, constituído por uma sucessão de perguntas. Cada vez que é feita uma pergunta, selecciona-se aleatoriamente qual o membro da equipa que vai responder. Considere que a Ana, o Bruno e a Carlota são escolhidos com probabilidade igual a $1/2$, $1/3$ e $1/6$, respectivamente. A probabilidade da Ana responder certo a qualquer pergunta é $4/5$ e as probabilidades do Bruno e da Carlota responderem certo são ambas iguais a $2/5$.

(a) Qual é a probabilidade de a equipa responder certo à primeira pergunta?
[Se não conseguir responder, considere o valor 0.65 nas restantes alíneas]

(b) Qual é a probabilidade de ter sido a Carlota a responder à primeira pergunta, sabendo que a resposta estava errada?

(c) Inicia-se o jogo e a cada pergunta responde um dos elementos da equipa, escolhido de acordo com a regra descrita acima.

i. Qual a probabilidade de ao fim de 10 perguntas a equipa ter acertado 3?

ii. Qual a probabilidade aproximada de, em 50 questões, a equipa acertar mais de 25?

Solução: Sejam os acontecimentos:

A- "escolher a Ana"
B- "ser escolher o Bruno"
C- "ser escolher a Carlota"
R- "responder correctamente"

Sabe-se que: $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/6$; $P(R|A) = 4/5$; $P(R|B) = P(R|C) = 2/5$;

(a) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C) = 4/5 \times 1/2 + 2/5 \times 1/3 + 2/5 \times 1/6 = 3/5$.

(b) $P(C|\overline{R}) = \frac{P(\overline{R}|C)P(C)}{P(\overline{R})} = 1/4$

(c) i. Seja X - "nº de perguntas respondidas correctamente em 10 perguntas seleccionadas".

$X \sim Bin(10, 0, 6)$

$P(X = 3) = C_3^{10}(0,6)^3(1 - 0,6)^7 = 0,0425$

ii. Seja Y - "nº de perguntas respondidas correctamente em 50 perguntas seleccionadas".

$Y \sim^a N(np = 30, np(1 - p) = 0, 6)$

$P(Y > 25) = 1 - P(Y \leq 25) = 1 - \Phi(-1, 44) = 0,9251$

(3.0) 3. Seja D o resultado da experiência que consiste no lançamento de um dado equilibrado (com as faces numeradas de 1 a 6). Considere as variáveis aleatórias, X e Y, respectivamente o resto da divisão inteira de D por 3 e 4. **Nota:** Por exemplo, o resto da divisão inteira de 7 por 5 é 2.

(a) Determine a função de probabilidade da v.a. X e da v.a. Y.

(b) Determine a função de probabilidade conjunta de (X, Y).

(c) Verifique se X e Y são independentes.

Solução:

(a) A v.a. D pode assumir valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$ todos com a mesma probabilidade $1/6$ de ocorrência, porque o dado é equilibrado. Analisemos os possíveis valores das novas v.a.'s X e Y, em função dos valores de D.

D	1	2	3	4	5	6
X	1	2	0	1	2	0
Y	1	2	3	0	1	2

A função de probabilidade de X é

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{cases}$$

A função de probabilidade de Y é

$$Y \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{cases}$$

(b) Para o par aleatório (X, Y) tem-se a função de probabilidade conjunta

$X \setminus Y$	0	1	2	3	
0	0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	1/6	0	0	1/3
2	0	1/6	1/6	0	1/3
	1/6	1/3	1/3	1/6	1

que, por dois exemplos, se pode explicar,

$$P(X = 0; Y = 2) = P(D = 6) = 1/6 \qquad P(X = 1; Y = 1) = P(D = 1) = 1/6$$

(c) Este par aleatório não é independente porque, por exemplo

$$P(X = 0; Y = 0) = 0 \neq P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

ou seja, não se verifica

$$P(X = x; Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y) \quad x = 0, 1, 2;\ y = 0, 1, 2, 3.$$

(4.0) 4. O departamento de controle de qualidade de uma firma produtora de conservas de atum específica que o peso líquido médio, por embalagem, tem distribuição Normal com desvio-padrão 15 gramas. Uma amostra de 25 embalagens forneceu os seguintes valores:

490	475	506	499	490	486	466	475	480	478	514	497	509	497	509
474	492	496	508	463	476	504	489	499	478					

(a) Utilizando o valor-p, teste a hipótese de aleatoriedade da amostra, ao nível de significância de 5%.

(b) Deduza e calcule um intervalo de 96% de confiança para o valor médio da população.

Solução: Seja X - "peso liquido médio por embalagem". $X \sim N(\mu, 15^2)$

(a) H_0: A amostra é aleatória *vs.* H_1: A amostra não é aleatória

A estatística de teste é : $Z = \frac{V - \frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \underset{Sob\, H_0}{\sim} N(0,1)$.

O valor observado da estatística é: $z_{obs} = \frac{17 - \frac{2*25-1}{3}}{\sqrt{\frac{16*25-29}{90}}} = 0,33$.

$Valor - p = 2 \times P(Z > 0,33) = 0,7414$.

Como $Valor - p > \alpha$, não rejeitamos H_0, ao nível de significância de 5%. Existe evidência estatística para afirmar que a amostra é aleatória.

(b) Estatística pivot: População Normal e σ conhecido $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{15/\sqrt{25}} \sim N(0,1)$.

Para um nível de confiança de 96%, escolhemos $c_1 = -2,05$ e $c_2 = 2,05$.

Assim, $P(-2,05 < Z < 2,05) = 0,96 \Leftrightarrow P(-2,05 < \frac{\overline{X} - \mu}{15/\sqrt{25}} < 2,05) = 0,96 \Leftrightarrow$

$P(-2,05 \times 3) < \overline{X} - \mu < 2,05 \times 3) = 0,96 \Leftrightarrow P(\overline{X} - 6,15 < \mu < \overline{X} + 6,15) = 0,96$.

Concretizando este intervalo para a amostra observada, obtemos: $IC_{96\%}(\mu) =]483,85; 496,15[$.

(3.5) 5. Uma equipa de obstetras recolheu dados relativos ao diâmetro biparietal (cm), medido através de ecografia às 34 semanas de gestação, e ao perímetro da cabeça (cm) à nascença. No quadro que se segue apresentam-se alguns dos 12 pares de observações, ordenados por ordem crescente do diâmetro biparietal.

$x-$diâmetro biparietal (34 semanas)	7.81	8.03	8.09	$\cdots$	8.98	9.02	9.03
$y-$perímetro cefálico (nascença)	31.99	32.66	33.13	$\cdots$	36.23	36.45	35.59

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 102.16 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i = 414.84 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 871.608 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 14364.41 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 3538.096$$

(a) Estime o declive da recta dos mínimos quadrados de y sobre x e interprete o seu significado.

(b) Será que podemos concluir que o perímetro da cabeça (cm) à nascença é influenciado de forma linear pelo diâmetro biparietal (cm) às 34 semanas. Teste esta hipótese ao nível de significância de 5%.

(c) Qual é o perímetro cefálico à nascença que se prevê para um feto com 8.5 cm de diâmetro biparietal às 34 semanas?

(a) $\hat{\beta}_1 = 3.406815$

(b) Pretende-se testar: $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Estatística de teste: $T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \underset{Sob\, H_0}{\sim} t_{n-2}$.

Temos $t_{obs} = 12.07$.

Região de rejeição do teste: $R_{0.05} =]-\infty; -2.23[\cup]2.23; +\infty[$ Rejeita-se H_0 ao nível de significância 5%.

(c) 34.525

(2.0) 6. Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Considere os seguintes estimadores de θ:

$$T_1 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad \text{e} \qquad T_2 = 2\overline{X}^2.$$

Sabendo que $E(X) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$ e $V(X) = \frac{3\theta}{2}$, verifique se os estimadores são centrados.

Solução: Como $E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 2\theta$, resulta que $E(T_1) = \theta$.

Como $E(\overline{X}^2) = V(\overline{X}) + E^2(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} + E^2(X)$, resulta que $E(T_2) = 2E(\overline{X}^2) = \theta(1 + 3/n) \neq \theta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.