FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Probabilidades e Estatística

Exame de Recurso - 17 de Julho de 2009

Duração: 2h30

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

(3.5) 1. Considere a variável aleatória X com função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Determine o valor k e $E(X)$.

(b) Sabendo que $E(X^2) = 4/5$, determine $V(2X-1)$.

(c) Considere A o acontecimento $X > \frac{1}{2}$; B o acontecimento $X < \frac{3}{4}$; Calcule $P(B|A)$.

(4.0) 2. A Ana, o Bruno e a Carlota concorrem em equipa a um concurso televisivo, constituído por uma sucessão de perguntas. Cada vez que é feita uma pergunta, selecciona-se aleatoriamente qual o membro da equipa que vai responder. Considere que a Ana, o Bruno e a Carlota são escolhidos com probabilidade igual a $1/2$, $1/3$ e $1/6$, respectivamente. A probabilidade da Ana responder certo a qualquer pergunta é $4/5$ e as probabilidades do Bruno e da Carlota responderem certo são ambas iguais a $2/5$.

(a) Qual é a probabilidade de a equipa responder certo à primeira pergunta?
[Se não conseguir responder, considere o valor 0.65 nas restantes alíneas]

(b) Qual é a probabilidade de ter sido a Carlota a responder à primeira pergunta, sabendo que a resposta estava errada?

(c) Inicia-se o jogo e a cada pergunta responde um dos elementos da equipa, escolhido de acordo com a regra descrita acima.

i. Qual a probabilidade de ao fim de 10 perguntas a equipa ter acertado 3?

ii. Qual a probabilidade aproximada de, em 50 questões, a equipa acertar mais de 25?

(3.0) 3. Seja D o resultado da experiência que consiste no lançamento de um dado equilibrado (com as faces numeradas de 1 a 6). Considere as variáveis aleatórias, X e Y, respectivamente o resto da divisão inteira de D por 3 e 4.
Nota: Por exemplo, o resto da divisão inteira de 7 por 5 é 2.

(a) Determine a função de probabilidade da v.a. X e da v.a. Y.

(b) Determine a função de probabilidade conjunta de (X, Y).

(c) Verifique se X e Y são independentes.

(4.0) 4. O departamento de controle de qualidade de uma firma produtora de conservas de atum específica que o peso líquido médio, por embalagem, tem distribuição Normal com desvio-padrão 15 gramas. Uma amostra de 25 embalagens forneceu os seguintes valores:

490	475	506	499	490	486	466	475	480	478	514	497	509	497	509
474	492	496	508	463	476	504	489	499	478					

(a) Utilizando o valor-p, teste a hipótese de aleatoriedade da amostra, ao nível de significância de 5%.

(b) Deduza e calcule um intervalo de 96% de confiança para o valor médio da população.

(3.5) 5. Uma equipa de obstetras recolheu dados relativos ao diâmetro biparietal (cm), medido através de ecografia às 34 semanas de gestação, e ao perímetro da cabeça (cm) à nascença. No quadro que se segue apresentam-se alguns dos 12 pares de observações, ordenados por ordem crescente do diâmetro biparietal.

$x-$diâmetro biparietal (34 semanas)	7.81	8.03	8.09	$\cdots$	8.98	9.02	9.03
$y-$perímetro cefálico (nascença)	31.99	32.66	33.13	$\cdots$	36.23	36.45	35.59

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 102.16 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i = 414.84 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 871.608 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 14364.41 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 3538.096$$

(a) Estime o declive da recta dos mínimos quadrados de y sobre x e interprete o seu significado.

(b) Será que podemos concluir que o perímetro da cabeça (cm) à nascença é influenciado de forma linear pelo diâmetro biparietal (cm) às 34 semanas. Teste esta hipótese ao nível de significância de 5%.

(c) Qual é o perímetro cefálico à nascença que se prevê para um feto com 8.5 cm de diâmetro biparietal às 34 semanas?

(2.0) 6. Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Considere os seguintes estimadores de θ:

$$T_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad \text{e} \qquad T_2 = 2\overline{X}^2.$$

Sabendo que $E(X) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$ e $V(X) = \frac{3\theta}{2}$, verifique se os estimadores são centrados.

Formulário

	$P(X=x)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad x=1,\ldots,n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,\ldots,n, \quad 0<p<1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\ldots, \quad 0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N,M,n)$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0,n-N+M)\le x\le \min(M,n)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots, \quad \lambda>0$	λ	λ
$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$Gama(\alpha,\lambda)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \alpha>0, \quad \lambda>0$ $F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad x>0, \quad \alpha\in\mathbb{N}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{a}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\overset{a}{\sim} N(0,1)$
$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2-n\overline{X}^2\right)$			$Z=\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\overset{a}{\sim} N(0,1)$
$Z=\frac{V-\frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}\overset{a}{\sim} N(0,1)$		$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$	$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}\overset{a}{\sim}\chi^2_{k-p-1}$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$	$S_{xY}=\sum_{i=1}^{n}x_iY_i-n\overline{x}\overline{Y}$	$S_{YY}=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2$
$SQ_R=S_{YY}-\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}} \qquad R^2=\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}S_{YY}}$	$\hat{\beta}_1=\frac{S_{xY}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x}$
$\hat{\sigma}^2=\frac{SQ_R}{n-2} \qquad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}}\sim t_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}\sim t_{n-2}$