UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística E

Exame - 24 de Junho de 2010
Duração: 2h30

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

1. Nota: A População é normal com variância desconhecida.

   (a) Pretende-se testar: $H_0 : \sigma^2 \leq 0,5 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > 0,5$.
   Estatística de teste:

   $$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{Sob\, H_0}{\sim} \chi^2_{n-1} \qquad (\sigma_0^2 = 0,5)$$

   Região de rejeição do teste:

   $$R_{0,05} =]23,7\ ;\ +\infty[$$

   Como $x^2_{obs} = 15.4$ não pertence a $R_{0,05}$, não se rejeita H_0 ao nível de significância 5%.

   (b) A dedução do IC encontra-se na sebenta.
   $IC_{95\%}(\mu) =]99,59\ ;\ 100,41[$

   (c) $s^2 = 0,2$.

2. (a) i. O estimador dos momentos é dado pela solução da equação $E(X) = \bar{X}$, isto é, $\hat{\theta} = \bar{X} + 1$. O estimador de máxima verosimilhança coincide com o estimador dos momentos.
   A estimativa de θ é $\hat{\theta} = 3.9$.

   ii. $SE_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\theta(\theta-1)}{n}}$. Logo a estimativa do erro padrão é $\hat{SE}_{\hat{\theta}} = 0,056$.
   $V(\hat{\theta}) = \frac{\theta(\theta-1)}{2n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo $\hat{\theta}$ é um estimador consistente.

   (b) Pretende-se testar: H_0 : A amostra é aleatória vs H_1 : A amostra não é aleatória.
   Estatística de teste:

   $$Z = \frac{V - (2n-1)/3}{\sqrt{((16n-29)/90)}} \underset{Sob\, H_0}{\sim} N(0;1).$$

   Temos $v_{obs} = 18$ e $z_{obs} = -0,45$.
   $valor - p = 2\min\{P(Z < -0,45|H_0), P(Z > -0,45|H_0)\} = 0,6528 > \alpha = 0,1$.
   Logo não se rejeita H_0 ao nível de significância 10%.

3. (a) Se X é uma v.a. contínua com distribuição F, o Teorema da Transformação Uniformizante assegura-nos que $F(X) \sim U(0,1)$. Logo, para obter uma observação de X, basta calcular $F^{-1}(u)$ onde u é um número do intervalo $]0,1[$.

   (b) Neste caso, com $x \in \mathbb{R}^+$ e $u \in]0,1[$,

   $$F(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = u \Rightarrow F^{-1}(u) = \sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

   Deste modo,

   $$F^{-1}(0,2513) = 0,579352 \quad \text{e} \quad F^{-1}(0,8437) = 2,32335$$

4. (a) i. Seja D_i o acontecimento que se verifica se o fósforo i for defeituoso, $i = 1, ..., 15$. Dado que os acontecimentos D_i são mutuamente independentes, então a probabilidade de numa caixa de 15 fósforos, apenas o primeiro fósforo ser defeituoso é dada por:

   $$P(D_1 \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_{15}}) = P(D_1) \times P(\overline{D_2}) \times \cdots \times P(\overline{D_{15}}) = 0.1 \times 0.9^{14} \simeq 0.0229.$$

ii. Seja X a v.a que contabiliza o número de fósforos defeituosos ("sucessos") numa caixa de 15 fósforos. Dado que cada fósforo é defeituoso ou não, independentemente dos outros fósforos o serem ou não, então $X \sim Bin(15, 0.1)$. Assim,

$$P(X = 1) = \binom{15}{1} 0.1(1 - 0.1)^{14} \simeq 0.3432.$$

(b) Seja Y a v.a que contabiliza o número de fósforos sem defeito numa caixa de 30. Tendo em conta o mesmo raciocínio apresentado na alínea anterior, conclui-se que $Y \sim Bin(30, 0.9)$, vindo

$$E(Y) = 30 \times 0.9 = 27.$$

5. (a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4,5; \\ 2x - 9, & 4,5 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

(b) $\mu = 19/4 = 4,75, \quad \sigma^2 = 1/48 = 0,02 \quad me = 19/4.$

(c) Dos tubos que têm diâmetro inferior a 4.6 cm escolhe-se 1/3 para ficarem retidos na fábrica, acontecendo o mesmo com 1/5 dos que têm diâmetro maior ou igual a 4.9 cm. Seleccionado um tubo ao acaso, qual a probabilidade de ficar retido?

Considere os acontecimentos:
A - "tubo com diâmetro inferior a 4.6cm",
B - "tubo com diâmetro superior a 4.6cm e inferior a 4.9cm",
C - "tubo com diâmetro superior a 4.9cm"
R - "tubo retido".

$P(A) = P(C) = 0,2;\ P(B) = 0,6, \quad P(R|A) = 1/3, \quad P(R|B) = 0$ e $P(R|C) = 1/5$,
Pelo Teorema da probabilidade total,

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C)$$

(d) Seja X_i o diâmetro do tubo i, $(i = 1, 2, \ldots, 40)$ e $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{40} X_i}{40}$ o diâmetro médio dos 40 tubos. Pelo Teorema Limite Central $\sqrt{40}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0; 1)$. Assim,

$$P(\bar{X} \leq 4.8) = \Phi(2, 19) = 0,9857.$$