PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
Exame - 24 de Junho de 2010
Duração: 2h30

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

(4.5) 1. Um Banco admite, relativamente ao peso das barras de ouro que produz, uma variabilidade máxima de 0.5gr^2. Recolheu-se uma amostra aleatória de $n = 15$ barras que se verificou terem média 100gr e variância 0.55gr^2. Admitindo a normalidade do peso das barras de ouro,

(a) teste, ao nível de significância 5%, se a especificação sobre a variabilidade do peso das barras de ouro está a ser respeitada.

(b) determine um intervalo com nível de confiança de 95% para o peso médio das barras de ouro.

(c) Qual deverá ser a variabilidade para que, numa amostra de $n = 25$ barras de ouro, o intervalo de confiança de nível 99% do peso médio tenha uma amplitude igual a 0.5gr?

(4.0) 2. No registo dos acessos a um servidor, durante a última hora, podem ler-se os seguintes dados relativos ao número de acessos por segundo:

nº de acessos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequência	10	350	1200	1000	800	100	50	40	30	20

(a) Suponha que o número de acessos, por segundo, tem distribuição com função de probabilidade:

$$P(X = x) = \left(\tfrac{\theta-1}{\theta}\right)^x \tfrac{1}{\theta}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

sendo $\theta > 1$ um parâmetro desconhecido. Sabe-se que $E(X) = \theta - 1$ e $V(X) = \theta(\theta - 1)$.

i. Recorrendo ao método dos <u>momentos</u> e da <u>máxima verosimilhança</u>, estime o parâmetro θ.

ii. Considere o estimador dos momentos obtido acima. Estime o erro padrão, e verifique se o estimador é consistente.

(b) Admita que nos últimos 30 segundos registaram-se os seguintes números de acessos por segundo:

2 1 0 3 1 0 5 0 2 8 6 2 0 0 1 0 1 4 1 2 0 1 4 2 0 1 6 2 7 9

Podemos considerar, ao nível de significância de 10%, a amostra aleatória? Utilize o valor-p para responder à questão.

(2.0) 3. Considere a variável aleatória X com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$$

(a) Utilizando o método da transformação inversa, <u>explique</u> como podemos gerar números pseudo-aleatórios do modelo F.

(b) Sejam $u_1 = 0.2513$ e $u_2 = 0.8437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0, 1)$. Usando o método da transformação inversa, calcule os dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X.

(3.5) 4. Um fabricante de caixas de fósforo usualmente fornecidas em quartos de hotel, recebeu a dada altura um elevado número de queixas quanto à qualidade dos fósforos que fabrica. Numa rápida análise às condições de produção, verificou-se que 10% dos fósforos saem defeituosos tendo como consequência não se acenderem.

(a) Calcule a probabilidade de numa caixa com 15 fósforos:

i. apenas o primeiro fósforo ser defeituoso;

ii. haver apenas um fósforo defeituoso.

(b) Indique quantos fósforos sem defeito encontramos, em média, numa caixa com 30 fósforos.

(6.0) 5. Suponha que o diâmetro (em cm) de tubos para rega, é uma v.a. X que toma valores no intervalo $[4.5\ ,\ 5]$ de acordo com uma distribuição uniforme.

(a) Determine a função de distribuição. Apresente todos os cálculos.

(b) Determine o valor médio, variância e mediana dos tubos. Apresente todos os cálculos.

(c) Dos tubos que têm diâmetro inferior a 4.6 cm escolhe-se 1/3 para ficarem retidos na fábrica, acontecendo o mesmo com 1/5 dos que têm diâmetro maior ou igual a 4.9 cm. Seleccionado um tubo ao acaso, qual a probabilidade de ficar retido?

(d) Um lote de 40 tubos foi vendido a um cliente. Qual a probabilidade aproximada de o diâmetro médio dos tubos do lote ser inferior a 4.8 cm? Nota: Considere que o diâmetro é independente de tubo para tubo.

Formulário

	$P(X=x)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad x=1,\dots,n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,\dots,n, \quad 0<p<1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\dots, \quad 0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N,M,n)$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0,n-N+M)\le x\le \min(M,n)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots, \quad \lambda>0$	λ	λ
$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$Gama(\alpha,\lambda)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \alpha>0, \quad \lambda>0$ $F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad x>0, \quad \alpha\in\mathbb{N}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2-n\overline{X}^2\right)$			$Z=\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$Z=\frac{V-\frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$		$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$	$S_{xY}=\sum_{i=1}^{n}x_iY_i-n\overline{x}\overline{Y}$	$S_{YY}=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2$
$SQ_R=S_{YY}-\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}} \qquad R^2=\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}S_{YY}}$	$\hat{\beta}_1=\frac{S_{xY}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x}$
$\hat{\sigma}^2=\frac{SQ_R}{n-2} \qquad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}} \sim t_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}} \sim t_{n-2}$