UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Probabilidades e Estatística E

Recurso - 15 de Julho de 2010

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

1. Seja X - nº frutos com defeito num lote, $X \sim P(\lambda)$, $P(X=0)=0,05 \Rightarrow \lambda = 2,996$

   (a) $n=10$, $V-$ nº lotes que não contém frutos defeituosos, em 10 lotes. $V \sim Bin(10, 0, 05)$

   $$P(V=2) = \binom{10}{2} \times (0,05)^2 \times (1-0,05)^8 = 0,0746$$

   (b) $E(X) = V(X) = \lambda = 3$, $CV(X) = \frac{\sqrt{V(X)}}{E(X)} \times 100\% = 57,35\%$

   (c) Seja $Z-$ a v.a. que representa o nº de frutos com defeito em 4 lotes.

   $Z \sim P(\lambda = 3 \times 4)$, $P(Z=15) = \exp(-12)\frac{\times 12^{15}}{15!} = 0,0724$

   (d) $S_{75} = \sum_{i=1}^{75} X_i-$ nº total de frutos com defeito, em 75 lotes.

   Pelo T.L.C. $S_{75} \overset{a}{\sim} N(225, 225)$, $P(S_{75} > 200) \approx \Phi(1,67) = 0,9525$

   (e) $Y \sim Unif(n)$, $E(XY) = \frac{11}{2}$, $E(Y) = \frac{7}{2} \Rightarrow n = 6$ e $V(Y) = \frac{35}{12}$

   $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -5$,

   $V(W) = 4V(X) + V(Y) - 4Cov(X,Y) = \frac{419}{12}$,

   $Cov(W,Y) = 2Cov(X,Y) - V(Y) = -\frac{155}{12}$

2. (a) Como $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{e}{2}$, conclui-se que $c = \frac{e}{2}$.

   (b)

   $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{1-x}, & x > 1. \end{cases}$$

   (c)

   $$F^{-1}(u) = \begin{cases} 2u, & 0 < u \leq \frac{1}{2}; \\ 1 - ln(2-2u), & \frac{1}{2} < u < 1. \end{cases}$$

   Assim, para $u_1 = 0.2513$ tem-se $x_1 = 2 * 0.2513 = 0.5026$ e para $u_2 = 0.8437$ tem-se $x_2 = 1 - ln(2 - 2 * 0.8437) = 2.162831$.

3. Seja, $\mathbb{P}(D) = 0.08$, a probabilidade de uma peça escolhida ao acaso do total da produção ser defeituosa.
   Seja, $\mathbb{P}(R|D) = 0.98$ a probabilidade do sistema de controlo rejeitar uma peça defeituosa, logo, rejeitar correctamente.
   Seja, $\mathbb{P}(R|\overline{D}) = 0.03$ a probabilidade do sistema de controlo rejeitar uma peça que não é defeituosa, logo, rejeitar incorrectamente.

   (a) $\mathbb{P}(\overline{R}|D) = 1 - \mathbb{P}(R|D) = 1 - 0.98 = 0.02$

   (b) Recorrendo ao Teorema da Probabilidade Total, obtemos:

   $$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(R|\overline{D})\mathbb{P}(\overline{D}) = 0.98 \times 0.08 + 0.03 \times (1 - 0.08) = 0.106$$

(c) Recorrendo ao Teorema de Bayes, obtemos:

$$\mathbb{P}(D|R) = \frac{\mathbb{P}(D \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0.98 \times 0.08}{0.106} = 0.739623$$

4. $H_0 \; : \; X \sim F \quad \text{vs} \quad H_1 \; : \; X \nsim F$,
Nota: F é a f.d. do modelo com função de probabilidade $P(X = x) = \frac{1}{2^{x+1}}$

Estatística de teste: $X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$

	O_i	E_i
0	925	900
1	425	450
2	250	225
3	100	111,6
4	40	55,8
5	25	28,8
6	15	14,4
7	10	7,2
8	5	$3,6 \; < \; 5$
9	5	$3,6 \; < \; 5$

	O_i	E_i
0	925	900
1	425	450
2	250	225
3	100	111,6
4	40	55,8
5	25	28,8
6	15	14,4
7	10	7,2
8(ou mais)	10	7,2

Valor da estatística de teste

$X^2 = 13,24$

$k = 9$ e $p = 0 \Rightarrow p - value = P(X^2 > 13,24) \approx 0,1 > 0,05$, logo não rejeito H_0 ao nível de significância de 5%, i.e., os dados evidenciam que o modelo subjacente é tem f.p. $P(X = x) = \frac{1}{2^{x+1}}$

5. (a) $\hat{Y} = 0.036422x - 4.049017$
   (b) 25.08867
   (c) $]0.0284; 0.0444[$