FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Probabilidades e Estatística E
Recurso - 15 de Julho de 2010
Duração: 2h30

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

(5.5) 1. Da produção diária de uma grande região frutícola, uma cooperativa faz lotes de fruta para venda. O número de frutos com defeito num lote, X, é uma v.a. com distribuição de **Poisson**. Admita que 5% dos lotes não contêm frutos defeituosos.

(a) Um revendedor compra 10 lotes à cooperativa. Considere a v.a. V que representa o número de lotes, adquiridos pelo revendedor, que não contêm frutos defeituosos. Calcule $P(V = 2)$.

(b) Determine o valor médio a variância e o coeficiente de variação de X.
Nota: Se não resolver esta alínea considere, nas restantes alíneas, X com distribuição de Poisson com $\lambda = 3$.

(c) Calcule a probabilidade de num conjunto de 4 lotes, escolhidos ao acaso, haver 15 frutos com defeito.

(d) Num carregamento de 75 lotes, qual a probabilidade, aproximada, do número total de frutos com defeito ser superior a 200?

(e) Considere a v.a. Y com distribuição uniforme discreta de valor médio 7/2. Sabendo que $E(XY) = 11/2$, calcule $V(W)$ e $Cov(W, Y)$, com $W = 2X - Y$.

(4.0) 2. Admite-se que o tempo de vida de um certo tipo de componente electrónico, **em milhares de horas**, é uma variável aleatória com f.d.p. definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1; \\ c\,e^{-x}, & x > 1; \\ 0, & \text{outros valores de } x; \end{cases}$$

(a) Mostre que $c = \frac{e}{2}$.

(b) Determine a função de distribuição.

(c) Sejam $u_1 = 0.2513$ e $u_2 = 0.8437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0, 1)$. Usando o método da transformação inversa, calcule os dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X.

(3.0) 3. A actual linha de produção de uma empresa gera uma incidência de defeituosos da ordem dos 8%. Foi implementado um sistema de controlo de qualidade cuja probabilidade de rejeitar uma peça defeituosa é de 98%, e a probabilidade de rejeitar uma peça não defeituosa é de 3%.

(a) Qual a probabilidade de uma peça defeituosa passar no sistema de controlo?

(b) Qual a probabilidade de uma peça ser rejeitada por este sistema de controlo?

(c) Sabendo que uma peça foi rejeitada pelo sistema de controlo, qual a probabilidade de ser defeituosa?

(3.0) 4. No registo dos acessos a um servidor, durante os últimos 30 minutos, podem ler-se os seguintes dados relativos ao número de acessos por segundo:

nº de acessos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequência absoluta	925	425	250	100	40	25	15	10	5	5

Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese do modelo subjacente aos dados ter função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{1}{2^{x+1}}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

Nos cálculos, utilize 3 ou mais casas decimais. Apresente também o valor-p.

(4.5) 5. Para verificar a relação entre o número de linhas de código produzidas e o número de erros detectados, pediram-se a vários programadores que implementassem um conjunto de rotinas, desde as menos complexas, com menor número de linhas de código até mais complexas, ou seja, com mais linhas de código. Tendo-se registado os seguintes dados:

Linhas Código	100	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
Erros	4	9	15	16	20	46	54	59	72

$$\sum x_i = 9100; \qquad \sum x_i^2 = 12760000; \qquad \sum y_i = 295 \qquad \sum y_i^2 = 14675$$

(a) Ajuste um modelo de regressão linear simples aos dados.

(b) Qual o número médio de erros que prevê encontrar, num programa com 800 linhas de código.

(c) Determine o intervalo de confiança a 95% para o declive da recta de regressão. Apresente a dedução do intervalo.

(d) Prove que qualquer recta dos mínimos quadrados, com declive finito, passa por $(\bar{x}, \bar{y})$.

Formulário

	$P(X=x)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad x=1,\ldots,n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,\ldots,n, \quad 0<p<1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x=1,2,\ldots, \quad 0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N,M,n)$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0,n-N+M)\le x\le \min(M,n)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots, \quad \lambda>0$	λ	λ
$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$Gama(\alpha,\lambda)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad x>0, \quad \alpha>0, \quad \lambda>0$ $F(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad x>0, \quad \alpha\in\mathbb{N}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum X_i^2-n\overline{X}^2\right)$			$Z=\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
$Z=\frac{V-\frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$		$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$X^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$

$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$	$S_{xY}=\sum_{i=1}^{n}x_iY_i-n\overline{x}\overline{Y}$	$S_{YY}=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\overline{Y}^2$
$SQ_R=S_{YY}-\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}} \qquad R^2=\frac{S_{xY}^2}{S_{xx}S_{YY}}$	$\hat{\beta}_1=\frac{S_{xY}}{S_{xx}}$	$\hat{\beta}_0=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{x}$
$\hat{\sigma}^2=\frac{SQ_R}{n-2} \qquad \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{S_{xx}}}}\sim t_{n-2}$	$T=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{nS_{xx}}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}\sim t_{n-2}$