Probabilidades e Estatística E
Ano Lectivo 2010/2011
Época Normal - 2011/06/21

Resolução abreviada do Exame da Época Normal

1. Sejam X-tempo de duração de uma bateria (anos), $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$
   Informação amostral: $n = 36$ $\quad \bar{x} = 200.7/36 = 5.575$ $\quad s^2 = 303.1475/35 = 8.661357143$

   (a)
   - Hipóteses: $H_0: \mu \geq 6 \quad vs \quad H_1: \mu < 6$
   - Estatística de teste: $Z = \dfrac{\bar{X} - 6}{\sqrt{S^2/36}} \underset{\mu=6}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
   - Região de rejeição para um nível de 10% de significância:
     $R_{10\%} \equiv]-\infty, -c[$ e $P(Z \in R_{10\%}) \approx 0.10 \Leftrightarrow P(Z > c) \approx 0.10 \Leftrightarrow c \approx z_{0.1} = 1.28$
     $R_{10\%} \equiv]-\infty, -1.28[$
   - Regra de decisão para um nível de 10% de significância: Rejeitar H_0 se $z_{obs} = \dfrac{\bar{x} - 6}{\sqrt{s^2/36}} \in R_{10\%}$
   - Decisão: $z_{obs} = \dfrac{5.575 - 6}{\sqrt{8.661357143/36}} = -0.866457384 \notin R_{10\%}$ logo não rejeitamos H_0, isto é, com uma significância de 10%, decidimos que o fabricante não tem razão.
   - valor-p$= P(Z < z_{obs}) = P(Z < -0.87) = 1 - P(Z < 0.87) = 1 - 0.8069 = 019311$

   (b) Seja p-proporção de baterias com duração superior a 8 anos.
   Informação amostral: $n = 36$ $\quad \hat{p} = 5/36 = 0.138888889$
   - Estatística pivot: $Z = \sqrt{36}\dfrac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
   - Determinação das constantes c tal que $P(-c < Z < c) \approx 0.8$:
     $P(Z > c) \approx (1 - 0.8)/2 = 0.1 \Leftrightarrow c \approx z_{0.1} = 1.28$
   - Determinação do intervalo de 80% de confiança para p:
     Se substituirmos $\sqrt{p(1-p)}$ pela sua estimativa $\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}$,
     $$-1.28 < \sqrt{36}\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}} < 1.28 \Leftrightarrow \hat{P} - \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)} < p < \hat{P} + \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}$$
     $$IC_{80\%}(p) \equiv \left]\hat{P} - \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}, \hat{P} + \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}\right[$$
   - Estimativa de p por intervalo de 80% de confiança
     $$IC_{80\%}(p) = \left]\hat{p} - \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}, \hat{p} + \frac{1.28}{\sqrt{36}}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right[=]0.065111706, 0.212666072[$$

   (c)
   - Hipóteses: $H_0: X \sim Exp(2,4) \quad vs \quad H_1: X \nsim Exp(2,4)$
   - Estatística de teste: $X^2 = \sum_{i=1}^{4} \dfrac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{sob H_0}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_3$
   - Região de rejeição para um nível de 5% de significância:
     $R_{10\%} \equiv]c, +\infty[$ e $P\left(X^2 \in R_{10\%}\right) \approx 0.1 \Leftrightarrow P\left(X^2 > c\right) \approx 0.1 \Leftrightarrow c \approx \chi^2_{3,0.1} = 6.25$
     $R_{10\%} \equiv]6.25, +\infty[$
   - Regra de decisão para um nível de 10% de significância: Rejeitar H_0 se $x^2_{obs} \in R_{10\%}$
   - Decisão: $x^2_{obs} = 2.964777949 \notin R_{10\%}$ logo não rejeitamos H_0, isto é, com uma significância de 10%, decidimos que $X \sim Exp(2,4)$.

   (d) Para a amostra de dimensão $n = 36$,

- Hipóteses: H_0 : Amostra aleatória $\quad vs \quad H_1$: Amostra não aleatória
- Estatística de teste: $Z = \dfrac{V - \frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}} \underset{sobH_0}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
- Região de rejeição para um nível de 5% de significância:
  $R_{5\%} \equiv]-\infty, -c[\cup]c, +\infty[$ e $P(Z \in R_{5\%}) \approx 0.05 \Leftrightarrow P(Z \leq c) \approx 0.975 \Leftrightarrow c \approx z_{0.025} = 1.96$
  $R_{5\%} \equiv]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$
- Regra de decisão para um nível de 5% de significância: Rejeitar H_0 se $z_{obs} \in R_{5\%}$
- Decisão: $v = 27$ e $z_{obs} = 1.352092292 \notin R_{5\%}$ logo não rejeitamos H_0, isto é, com uma significância de 5%, decidimos que a amostra é aleatória.

2. Informação amostral: $n = 10$, $\bar{x} = 111.8$, $\bar{y} = 12.9$, $S_{xx} = 48551.6$, $S_{xY} = 3570.8$, $S_{YY} = 324.9$, $\hat{\sigma}^2 = 7.785022018$

   (a) As estimativas dos coeficientes da recta de regressão dos mínimos quadrados são:
   $\hat{\beta}_1 = 0.073546495$ e $\hat{\beta}_0 = 4.677501874$
   A recta de regressão dos mínimos quadrados é: $\hat{Y}(x) = 4.677501874 + 0.073546495\,x$
   Um coeficiente de determinação $R^2 = 0.808309707 \geq 0.8$ indica que o modelo de regressão linear simples possibilita um bom ajustamento aos dados.

   (b) Por cada dia de gestação, estima-se um *aumento* do tempo de vida de $\hat{\beta}_1 = 0.073546495$ anos.

   (c) A estimativa do tempo médio de vida para um período de gestação de $x_o = 212$ dias é
   $\widehat{E}(Y|212) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times 211 = 20.26935879$ anos.

3. Se $X \sim Unif(\theta)$, $E(X) = \dfrac{\theta+1}{2}$ e $V(X) = \dfrac{\theta^2-1}{12}$

   (a) $E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \dfrac{\theta+1}{2} = \overline{X} \Leftrightarrow \theta^* = 2\overline{X} - 1$

   (b) $E(\theta^*) = 2E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) - 1 = \dfrac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^n E(X_i)\right) - 1 = \dfrac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^n \dfrac{\theta+1}{2}\right) - 1 = \dfrac{2n}{n}\dfrac{\theta+1}{2} - 1 = \theta$,
   logo θ^* é estimador centrado de θ.
   $V(\theta^*) = 4V\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \dfrac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i) = \dfrac{4n}{n^2}\dfrac{\theta^2-1}{12} = \dfrac{\theta^2-1}{3n}$
   Como θ^* é estimador centrado de θ e $V(\theta^*) = \dfrac{\theta^2-1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ então θ^* é estimador consistente de θ.

4. Considerem-se os acontecimentos:
   S-exploração pequena, M-exploração média, G-exploração grande, F-exploração familiar

   $P(S) = 0.57$, $P(M) = 0.35$, $P(G) = 0.08$
   $P(S \cap F) = 0.51$, $P(F|M) = 0.3$, $P(F|G) = 0.001$

   (a) $P(F) = P(S \cap F) + P(M \cap F) + P(G \cap F) = 0.51 + P(F|M)P(M) + P(F|G)P(G) = 0.61508$

   (b) $P(M \cup G|F) = P(\overline{S}|F) = 1 - P(S|F) = 1 - \dfrac{P(S \cap F)}{P(F)} = 0.170839566$

5. (a)
   - $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 - \dfrac{x}{2} \geq 0,\ x \in]0, a[\Rightarrow 0 < x \leq 2$ e $x \in]0, a[\Rightarrow a \leq 2$
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = 1 \Leftrightarrow a - \frac{a^2}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 2$

(b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

(c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^2 x \left(1 - \dfrac{x}{2}\right) dx = \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2} = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$

(d) Seja X-n.º de dias com ruptura de stock, de entre 60.

i. X tem distribuição Binomial de parâmetros $(60, 0.02)$.

ii. Como $n = 60 \geq 50$ e $np = 1.2 \leq 5$, podemos aproximar a distribuição de X pela distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 1.2$.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(X = k) \approx 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-1.2} \frac{1.2^k}{k!} =$

$= 1 - 0.879487099 = 0.120512901$