

**Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.**

- (5.0) 1. O fabricante de um determinado modelo de telemóveis alega que o tempo médio de duração da bateria é inferior a 6 anos. Foram registados os seguintes tempos de duração de 36 baterias aleatoriamente seleccionadas:

5.2 3.1 9.9 7.2 2.1 5.2 11.1 2.2 5.7 4.5 2.6 5.2 7.9 2.1 4.7 2.3 10.5 7.5
14.1 2.5 2.8 2.2 5 7.1 2.9 3.6 5.1 6.3 5.7 7.6 3.8 9.8 2.9 7.2 7.5 5.6

$$\sum_{i=1}^{36} x_i = 200.7 \quad , \quad \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2 = 303.1475$$

- (a) Teste ao nível de 10% de significância se o fabricante tem razão e determine o valor-p.
(b) Estime por intervalo de 80% de confiança a proporção de baterias cujo tempo de duração excede os 8 anos.
(c) Com o propósito de se testar se o tempo de duração de uma bateria tem distribuição Exponencial de parâmetros (2, 4), considere a seguinte tabela de agrupamento em classes da amostra:

Classe	O_i	E_i
$]-\infty, 4]$	13	14.165
$]4, 6]$	10	8.591
$]6, 8]$	8	5.211
$]8, +\infty[$	5	8.033

Apresente as suas conclusões ao nível de significância de 10%.

- (d) Poderemos concluir que a amostra resultou de uma escolha aleatória de tempos de duração de 36 baterias? (Use um nível de significância de 5%).

- (3.0) 2. A seguinte tabela apresenta o período de gestação (x), em dias, e o tempo de vida (Y), em anos, registados em 10 mamíferos.

x_i	219	238	42	98	100	164	21	112	61	63
Y_i	18	25	7	12	15	15	3	10	12	12

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1118 \quad , \quad S_{xx} = 48551.6 \quad , \quad S_{xY} = 3570.8 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} Y_i = 129 \quad , \quad S_{YY} = 324.9$$

- (a) Estime a recta de regressão linear simples. Calcule o coeficiente de determinação e comente.
(b) Interprete no contexto do problema, o significado do valor de $\hat{\beta}_1$ obtido.
(c) O período de gestação de uma girafa é de 212 dias. Se usasse a recta determinada em a) que previsão obteria para o seu tempo médio de vida?

- (2.5) 3. Num saco existem θ bolas numeradas de 1 a θ . Extraem-se, ao acaso e com reposição, m bolas e considere-se a amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ dos números exibidos nas bolas extraídas. Como X_i tem distribuição uniforme discreta com parâmetro θ , i.e., $X_i \sim \text{Unif}(\theta)$:

- (a) Justifique porque $\theta^* = 2\bar{X} - 1$ é o estimador dos momentos de θ .
(b) Mostre que θ^* é um estimador centrado e consistente de θ .

- (4.0) 4. De acordo com o ‘Inquérito às Estruturas das Explorações Agrícolas’ efectuado em Portugal, 57% das propriedades agrícolas são de pequena dimensão, 35% são de dimensão média e 8% são de grande dimensão. Da totalidade das explorações agrícolas, 51% são simultaneamente de pequena dimensão e familiares. Sabe-se ainda que, das propriedades de dimensão média, 30% são explorações familiares, enquanto que só 0.1% das propriedades de grande dimensão são exploradas familiarmente. Escolhida uma exploração agrícola ao acaso, determine a probabilidade:

- (a) Ser uma exploração familiar.
- (b) Ser de dimensão média ou grande, sabendo que é uma exploração familiar.

- (5.5) 5. Numa indústria alimentar o consumo diário de uma certa matéria prima (em toneladas) é uma variável aleatória, X , com função densidade assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < a \text{ e } a \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

- (a) Mostre que $a = 2$.
- (b) Determine a função distribuição da variável aleatória X .
- (c) Determine o consumo diário esperado.
- (d) Considere que em cada dia a probabilidade de ruptura de *stock* é de 0.02. Suponha ainda que a ruptura de *stock* é independente de dia para dia.
 - i. Identifique a distribuição do número de dias em dois meses (60 dias) em que há ruptura de *stock*.
 - ii. Qual a probabilidade, aproximada, de em dois meses (60 dias) haver mais de 2 dias com ruptura de *stock*? (Use uma distribuição discreta).