FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística E
Ano Lectivo 2010/2011
Época Recurso - 2011/07/12

Resolução abreviada do Exame da Época de Recurso

1. $X \sim N\left(60, 15^2\right)$.

   (a) $P(\text{Grande}) = P(X > 75) = 1 - P\left(\frac{X-60}{15} \leq \frac{75-60}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

   (b) $E(L) = E\left(12 - \dfrac{X^2}{400}\right) = 12 - \frac{E(X^2)}{400} = 2.4375$ cêntimos, porque
   $E\left(X^2\right) = V(X) + E^2(X) = 15^2 + 60^2 = 3825$

   (c) Seja T-peso de um saco com 9 maçãs e $X_1, \ldots, X_9$ o peso de 9 maçãs escolhidas ao acaso. Como $X_1, \ldots, X_9$ são v.a.'s i.i.d. $N\left(60, 15^2\right)$, $T = \sum_{i=1}^{9} X_i \sim N(E(T), V(T)) \equiv N(540, 2025)$, porque
   $E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right) = \sum_{i=1}^{9} E(X_i) = \sum_{i=1}^{9} 60 = 540$
   $V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{9} X_i\right) = \sum_{i=1}^{9} V(X_i) = \sum_{i=1}^{9} 15^2 = 2025$
   $P(T > 500) = P\left(\frac{T-540}{45} > \frac{500-540}{45}\right) = 1 - \Phi(-0.89) = \Phi(0.89) = 0.8133$

   (d) Seja Y-n.º de maçãs grandes de entre 9. $Y \sim Bin(9, 0.1587)$
   $P(2 \leq Y \leq 3) = \sum_{k=2}^{3} P(Y = k) = \sum_{k=2}^{3} \binom{9}{k} 0.1587^k (1 - 0.1587)^{9-k} = 0.389512099$

2. Considerem-se os acontecimentos:
   G-maçã grande, M-maçã média, P-maçã pequena e S-maçã para sumo.
   $P(S|G) = 0.02$, $P(S|M) = 0.05$, $P(S|P) = 0.15$
   $P(G) = P(P)$, $P(M) = 0.7$
   $P(P) + P(M) + P(G) = 1 \Leftrightarrow 2P(G) + 0.7 = 1 \Leftrightarrow P(P) = P(G) = 0.15$
   $P(S) = P(S|G)P(G) + P(S|M)P(M) + P(S|P)P(P) = 0.0605$

3. (a)

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	0	0.05	0.25	0.3
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.2	0	0	0.2
	0.5	0.25	0.25	1

   (b) $P(X + Y = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) = 0.65$

   (c) $E(X) = \sum_{x=0}^{2} xP(X = x) = 0.9$

   (d) $E\left(Y^2\right) = \sum_{y=0}^{2} y^2 P(Y = y) = 1.25 \quad V(Y) = E\left(Y^2\right) - E^2(Y) = 0.6875$
   $E(XY) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} xyP(X = x, Y = y) = 0.2 \quad cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -0.475$
   $\rho(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = -0.818387935$

4.
   - Hipóteses: $H_0: P(C_i) = 0.25,\ i = 1, \ldots, 4 \quad vs \quad H_1: \exists\, i: P(C_i) \neq 0.25,\ i = 1, \ldots, 4$
   - Valores esperados, caso H_0 seja verdadeira: $E_i = n\,P(C_i) = 200 \times 0.25 = 50,\ i = 1, \ldots, 4$
   - Estatística de teste: $X^2 = \sum_{i=1}^{4} \dfrac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{a}{\sim}} \chi^2_{4-1} \equiv \chi^2_3$
   - Região de rejeição para um nível de 10% de significância:
     $R_{10\%} \equiv]c, +\infty[$ e $P\left(X^2 \in R_{10\%}\right) \approx 0.10 \Leftrightarrow P\left(X^2 > c\right) \approx 0.10 \Leftrightarrow c \approx \chi^2_{0.1} = 6.25$
     $R_{10\%} \equiv]6.25, +\infty[$
   - Regra de decisão para um nível de10% de significância: Rejeitar H_0 se $x^2_{obs} \in R_{10\%}$

- Decisão: $x^2_{obs} = 10.48$ e $x^2_{obs} \in R_{10\%}$. Decidimos rejeitar H_0 ao nível de 10% de significância, o que significa que existe evidência estatística (com 10% de significância) de que os consumidores não têm igual preferência pela cor do telemóvel.

5. (a) Sejam p-proporção de pessoas que gastam mais de 15 h/semana a ver televisão
   Informação amostral: $n = 120 \quad \hat{p} = 36/120 = 0.3$
   - Hipóteses: $H_0 : p \leq 0.3 \quad vs \quad H_1 : p > 0.3$
   - Estatística de teste: $Z = \dfrac{\hat{P} - 0.3}{\sqrt{0.00175}} \underset{p=0.3}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
   - Região de rejeição para um nível de 10% de significância:
     $R_{10\%} \equiv]c, +\infty[$ e $P(Z \in R_{10\%}) \approx 0.10 \Leftrightarrow P(Z > c) \approx 0.10 \Leftrightarrow c \approx z_{0.1} = 1.28$
     $R_{10\%} \equiv]1.28, +\infty[$
   - Regra de decisão para um nível de 10% de significância: Rejeitar H_0 se $z_{obs} = \dfrac{\hat{p} - 0.3}{\sqrt{0.00175}} \in R_{10\%}$
   - Decisão: $z_{obs} = \dfrac{0.3 - 0.3}{\sqrt{0.00175}} = 0 \notin R_{10\%}$ logo não rejeitamos H_0, isto é, com uma significância de 10%, decidimos que a proporção de pessoas que gastam mais de 15 h/semana a ver televisão não ultrapassa os 30%.

   (b) Seja σ o desvio padrão do tempo gasto semanalmente a ver televisão, por cada pessoa.
   Informação amostral: $n = 15 \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2}{15-1} = 4$
   - Estatística pivot: $X^2 = \dfrac{(15-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{15-1}$
   - Determinação das constantes a e b tais que $P\left(a < X^2 < b\right) = 0.8$:
     $P\left(X^2 \leq a\right) = 0.1 \Leftrightarrow a = \chi^2_{14,0.9} = 7.79 \quad P\left(X^2 \geq b\right) = 0.1 \Leftrightarrow b = \chi^2_{14,0.1} = 21.1$
   - Determinação do intervalo de 80% de confiança para σ:
     $7.79 < \dfrac{14S^2}{\sigma^2} < 21.1 \Leftrightarrow \dfrac{14S^2}{21.1} < \sigma^2 < \dfrac{14S^2}{7.79}$
     $IC_{80\%}(\sigma^2) \equiv \left]\dfrac{14S^2}{21.1}, \dfrac{14S^2}{7.79}\right[$
     $IC_{80\%}(\sigma) \equiv \left]\sqrt{\dfrac{14S^2}{21.1}}, \sqrt{\dfrac{14S^2}{7.79}}\right[$
   - Estimativa de σ por intervalo de 80% de confiança
     $IC_{80\%}(\sigma) = \left]\sqrt{\dfrac{14s^2}{21.1}}, \sqrt{\dfrac{14s^2}{7.79}}\right[=]1.629118914, 2.681175762[$

   (c) $X \sim N(\mu, 4)$
   - Estatística pivot: $Z = \sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - \mu}{2} \sim N(0,1)$
   - Determinação da constante c tal que $P(-c < Z < c) = 0.95$
     $P(-c < Z < c) = 0.95 \Leftrightarrow P(Z > c) = 0.025 \Leftrightarrow c = z_{0.025} = 1.96$
   - Determinação do intervalo de 95% de confiança para μ:
     $-1.96 < \sqrt{n}\dfrac{\bar{X} - \mu}{2} < 1.96 \Leftrightarrow \bar{X} - 1.96\dfrac{2}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\dfrac{2}{\sqrt{n}}$
     $IC_{95\%}(\mu) \equiv \left]\bar{X} - 1.96\dfrac{2}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right[$
   - Amplitude do $IC_{95\%}(\mu)$: $A = 2\dfrac{2 \times 1.96}{\sqrt{n}}$
   - $A \leq 1.5 \Leftrightarrow \dfrac{4 \times 1.96}{\sqrt{n}} \leq 1.5 \Leftrightarrow n \geq \left(\dfrac{4 \times 1.96}{1.5}\right)^2 = 27.31804444$

Deveremos considerar uma amostra de dimensão $n \geq 28$.