

e) $T = \max(X, Y)$

X	Y	T
0	0	0
	2	2
	3	3
1	0	1
	2	2
	3	3
2	0	2
	2	2
	3	3

- 1º: Saber que valores pode tomar
- 2º: Calcular as probabilidades todas

$$P(T=0) = P(X=0, Y=0) = \frac{1}{12}$$

$$P(T=1) = P(X=1, Y=0) = \frac{1}{6}$$

$$P(T=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$$

$$P(T=2) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Aula 6 - 18/03/2013

Variáveis aleatórias (absolutamente) contínuas

Def: Uma v.a. com função distribuição $F_X(x)$ diz-se contínua se existir uma função $f_X(\cdot) \geq 0$ tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad \bullet \text{ A } f_X(x) \text{ designamos por função densidade de probabilidade (f.d.p.)}$$

Prop: Se é uma f.d.p.:

$$1) f(x) \geq 0, \forall x$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

~~$P(X=a) = f(a)$~~ ? Não, para as v.a. contínuas

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(X=c) = \int_c^c f(x) dx$$

Def: Se X é uma v.a. contínua definimos o seu valor esperado ou valor médio como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Def: Se X é uma v.a. contínua e $\phi(\cdot)$ uma função contínua então definio:

- $E[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx$

Ex. $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

- $V(X) \triangleq E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Ex 66

$$f_x(x) = \begin{cases} a, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \text{ (c.c.)} \end{cases}$$

Uma forma de identificar estas funções é ver que não conseguimos enumerar todos os valores em caso contrário que é definida

X - tempo de espera (min) até a chegada do 10 comboio

a)

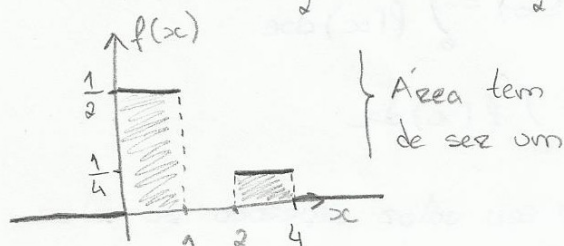
i) $f_x(x) \geq 0, \forall x \Rightarrow a \geq 0$

$\int 0 = 0$
(integrar o d'0)

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 a dx + \int_2^4 \frac{1}{4} dx = 1 \Leftrightarrow [ax]_0^1 + \left[\frac{x}{4}\right]_2^4 = 1$

$\Leftrightarrow a - 0 + 1 - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \geq 0$

$P(x^a) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$



b) $P(1 < X \leq 3) = \int_1^3 f_x(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{4} dx = \left[\frac{x}{4}\right]_2^3 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$

c) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \frac{1}{2} dx + \int_2^4 x \cdot \frac{1}{4} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{8}\right]_2^4 = \frac{1}{4} - 0 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$

Ex 54

X - Número de chips defeituosos (em 5)

a) $X \sim H(20, 4, 5)$

(X segue uma distribuição Hipergeométrica)

$$P(X=x) = \frac{C_x^4 \cdot C_{5-x}^{16}}{C_5^{20}}, x=0, \dots, 4$$

b) $E[X] = n \cdot \frac{M}{N} = 5 \times \frac{4}{20} = 1$

c) $V[X] = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1} = 1 \left(1 - \frac{4}{20}\right) \times \frac{20-5}{20-1} = 0,63$

2)

Def: Seja: $P(\text{'sucesso'})$

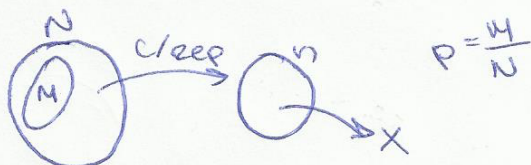
X - número de sucessos em n provas independentes

$$P(X=x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline s & s & s & \bar{s} & \bar{s} & \bar{s} & \bar{s} & \bar{s} \\ \hline \end{array} \quad P(s \dots n \bar{s}) =$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_x \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-x} \quad = P(s)P(s) \dots P(\bar{s})$

Então digo que X segue uma distribuição binomial com parâmetros n e p e escrevo $X \sim B(n, p)$



$\rightarrow E[X] = np$

$\rightarrow V[X] = np(1-p)$

Prop: Se $X \sim H(N, M, n)$ e se $\frac{n}{N} < 0,1$ então $X \approx B(n, \frac{M}{N})$

Prop: Se $X_1, \dots, X_n$ forem v.a.'s:

$X_i \sim B(n_i, p)$ então $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_m \sim B(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p)$

Ex 57

b) X - Número de maçãs contaminadas em 4

$X \sim B(4, \frac{4}{3})$

$P(X=x) = C_x^4 \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}, x=0, \dots, 4$

$$a) \quad i) P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,32$$

$$ii) P(X=0) = C_0^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0,004$$

$$iii) P(X < 4) = 1 - P(X=4) = 1 - 0,32 = 0,68$$

$$c) E[X] = np = 4 \times \frac{3}{4} = 3$$

$$V(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

d) X - Número de maçãs contaminadas em 4 $X \sim B(4, \frac{3}{4})$

Y - Número de maçãs contaminadas em 3 $Y \sim B(3, \frac{3}{4})$

T - total das maçãs contaminadas nas 2 amostras

$$T = X + Y \sim B(3+4, \frac{3}{4})$$

$$P(T=t) = C_t^7 \left(\frac{3}{4}\right)^t \left(\frac{1}{4}\right)^{7-t}, \quad t=0, \dots, 7$$

$$P(T=2) = C_2^7 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \approx 0,012$$

3)

Def: Se: $p = P(\text{Sucesso})$

X - Número de provas independentes até ao primeiro sucesso, com a função probabilidade: $P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p, \quad x=1, 2, \dots$ infinito

$\underbrace{\overbrace{\underbrace{\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}_{x-1}}_x}}_x$, então digo que X segue uma distribuição geométrica de

parâmetro p e escrevo $X \sim \text{Geométrica}(p)$ ou $X \sim G(p)$

$$\rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$$

$$\rightarrow V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Ex 59 X - N.º de carros reprovados à 1ª tentativa em n

a) $n=20$ $X \sim B(n, 0.2) \hat{=} P(X=x) = \binom{n}{x} 0.2^x \cdot 0.8^{n-x}$

i) $X \sim B(20, 0.2)$

ii) $E[X] = np = 20 \times 0.2 = 4$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \times 0.2 \times 0.8} \approx 1.79$$

iii) (Não é para considerar $n=20$)

$$n: P(X > 0) > 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) > 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0.9 > \binom{n}{0} 0.2^0 \times 0.8^n$$

$$\Leftrightarrow 0.1 > 0.8^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(0.1) > n \log n(0.8)$$

$$\Leftrightarrow -2.3 > -0.22n$$

$$\Leftrightarrow 2.3 < 0.22n$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{2.3}{0.22} = 10.45 \uparrow$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

b)

i) Y - N.º de automóveis inspecionados até que 1 seja reprovado

$$Y \sim G(0.2) \quad P(Y=y) = 0.8^{y-1} \times 0.2, \quad y=1, 2, \dots$$

$$ii) P(Y < 3) = P(Y=1) + P(Y=2) = 0.2 + 0.8 \times 0.2 = 0.36$$

Aula 8 - 27/03/2013

4) Def: A v.a. X com probabilidade dada por:

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, 2, \dots \quad 0! = 1$$

digo que X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ e escrevo $X \sim P(\lambda)$.

$$\rightarrow E[X] = \lambda$$

$$\rightarrow V(X) = \lambda$$

Prop: Se $X \sim B(n, p)$, se $n \geq 30$ e se $\min\{np, n(1-p)\} \leq 5$ então
 $X \hat{\sim} P(np)$

Propriedade Aditiva de Poisson Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ forem v.a.'s tais que $X_i \sim P(\lambda_i)$
 então $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$.

Ex 60

a) $X(10) \sim N^\circ$ de chamadas recebidas entre as 9h-9h10

i) $X(10) \sim P(1.5)$ $P(X(10)=x) = \frac{e^{-1.5} 1.5^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$

$P(X(10)=0) =$
 $= \frac{e^{-1.5} 1.5^0}{0!} \approx 0.223$

ii) $P(X(10) > 2) = 1 - P(X(10) \leq 2) =$
 $= 1 - P(X(10)=0) - P(X(10)=1) - P(X(10)=2) =$
 $= 1 - 0.223 - \frac{e^{-1.5} \times 1.5^1}{1!} - \frac{e^{-1.5} (1.5)^2}{2!} \approx 0.19$

iii) $E(X) = V(X) = 1.5$

b) $X(30) = N^\circ$ de chamadas recebidas das 11h-11h30

$X(30) \sim P(3 \times 1.5) \equiv$ (pelo teo. da prop. aditiva) $P(4.5)$

$P(X(30)=x) = \frac{e^{-4.5} 4.5^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$

i) $P(X(30)=0) = \frac{e^{-4.5} 4.5^0}{0!} \approx 0.011$

ii) $P(X(30) < 2) = P(X(30)=0) + P(X(30)=1) = 0.011 + \frac{e^{-4.5} 4.5^1}{1!} \approx 0.061$

iii) $E(X) = 4.5$ $\sigma = \sqrt{V(X)} = 2.12$

c) $Y(60) =$ Número de chamadas recebidas pelo director numa hora

$Y(60) \sim P(4)$

$Y(30) =$ Número de chamadas recebidas pelo director das 11h-11h30
 $Y(30) \sim P(2)$

$T(30) =$ N° total de chamadas das 11h-11h30

$T(30) = X(30) + Y(30) \sim P(4.5 + 2) \equiv P(6.5)$

↑
 Prop. Aditiva de Poisson

Ex 64

X - número de funcionários (em 100) que num dia fizeram cocos

$$X \sim B(100, 0.005) \quad P(X=x) = \binom{100}{x} 0.005^x \cdot 0.995^{100-x}, \quad x=0, \dots, 100$$

Se $n > 30$ e $np = 0.5 < 5$ então

$$X \approx P(100 \times 0.005) = P(0.5)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = \\ &= 1 - \binom{100}{0} 0.005^0 \times 0.995^{100} - \binom{100}{1} 0.005 \times 0.995^{99} \approx 0.089 \approx 0.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = \\ &= 1 - \frac{e^{-0.5} 0.5^0}{0!} - \frac{e^{-0.5} 0.5^1}{1!} \approx 0.0902 \end{aligned}$$

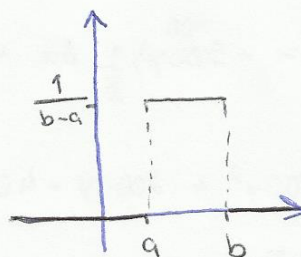
Variações Aleatórias Contínuas Importantes

1) Def: Digo que a v.a. contínua X com f.d.p. dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in]a, b[\\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Segue uma distribuição uniforme em $]a, b[$ e escrevo $X \sim \text{Uniforme}]a, b[$
ou $X \sim U]a, b[$.

$$\rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



$$\rightarrow E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\rightarrow V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Ex 71

X - Preço semanal do óleo (KL)

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, & x \in [0, 5] \\ 0, & x \notin [0, 5] \end{cases}$$

a)

$$i) f(x) \geq 0, \forall x \Rightarrow a \geq 0$$

$$ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 a dx = 1 \Leftrightarrow [ax]_0^5 = 1 \Leftrightarrow 5a - 0 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

b) $X \sim U[0,5]$

$$E[X] = \frac{0+5}{2} = 2.5$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^5 \frac{x}{5} dx = \left[\frac{x^2}{10} \right]_0^5 = \frac{25}{10} = 2.5$$

$$c) V(X) = \frac{(5-0)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

d) $Y \leq 5$

i) $L = L(X, Y)$ - Lucro Semanal

$$L(X, Y) = \begin{cases} 2000Y, & \text{se } Y \leq X \\ \underbrace{2000X - 500(Y - X)}_{1500X - 500Y}, & \text{se } Y > X \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ii) E[L] &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(X, Y) f(x) dx = \int_{-\infty}^Y (2500x - 500y) f(x) dx + \int_Y^{+\infty} 2000y f(x) dx = \\ &= \int_0^Y \underbrace{(2500x - 500y)}_{\substack{500 \\ 100}} \frac{1}{5} dx + \int_Y^5 \underbrace{2000y}_{400} \frac{1}{5} dx = [250x^2 - 100yx]_0^Y + [400yx]_Y^5 = \\ &= 250Y^2 - 100Y^2 + 2000Y - 400Y^2 = 2000Y - 250Y^2 \end{aligned}$$

$$iii) \frac{dE[L]}{dY} = 0 \Leftrightarrow 2000 - 500Y = 0 \Leftrightarrow Y = 4$$

$$\frac{d^2E[L]}{dY^2} = -500 < 0 \Rightarrow Y = 4 \text{ é um máximo}$$

Aula 9 - 03/04/2013

Método Congruencial: $[0, m-1]$

$x_0 = \text{"semente"}$

$$x_i = (a x_{i-1} + c) \bmod m$$

$$\underbrace{|x_0, x_1, x_2, \dots|}_{\text{ciclo} \leq m} |x_0, x_1, x_2, \dots$$

Ex. $a=5, c=7, m=8, x_0=5$

$$x_1 = (5 \times 5 + 7) \bmod 8 = 0$$

$$x_2 = (5 \times 0 + 7) \bmod 8 = 7$$

$$x_3 = (5 \times 7 + 7) \bmod 8 = 2$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
x_i	0	7	2	1	4	3	6	5	0	7	2	1	4	...

$$x_i \in [0, m-1]$$



$$u_i \in]0, 1[\quad u_i = \frac{x_i + 0.5}{m}$$

Ex.

$$u_1 = \frac{0 + 0.5}{8} = 0.0625$$

$$u_2 = \frac{7 + 0.5}{8} = 0.9375$$

Geracao de Números Pseudo-Aleatórios de Distribuição

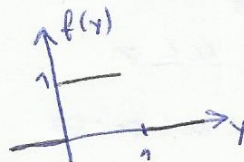
1) Método da Transformação Inversa

Teo. da Transformação Uniformizante: Se X é uma v.a. contínua com função distribuição $F(x)$ então $Y = F(X) \sim U[0, 1]$

$$\Downarrow$$

$$F(Y) = X$$

$$u \rightarrow x = F^{-1}(u)$$



$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \in]0, 1[\\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Ex 82

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^\beta}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\alpha, \beta > 0$$

$$X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$$

a) $u \in]0,1[$

$$u = F(x) \Leftrightarrow u = 1 - e^{-\lambda x^B} \quad \Leftrightarrow e^{-\lambda x^B} = 1 - u \quad \Leftrightarrow -\lambda x^B = \log(1 - u)$$

$$\Leftrightarrow x^B = -\frac{\log(1 - u)}{\lambda} \quad \Leftrightarrow x = \sqrt[B]{-\frac{\log(1 - u)}{\lambda}}$$

b) $u_1 = 0.2517$; $u_2 = 0.7437$; $u_3 = 0.1911$

$X \sim \text{Weibull}(3,5)$

$$x_1 = \sqrt[5]{-\frac{\log(1 - 0.2517)}{3}} = 0.6267 \quad \leftarrow \text{Tem de se fazer } \ln$$

$$x_2 = 0.8538 \quad x_3 = 0.5887$$

2) Método da Transformação Inversa para v.a.s Discretas

Teorema: Seja X uma v.a. discreta com função probabilidade $p_j = P(X = x_j)$, $j = 1, \dots, K$

$$\text{A sua função distribuição: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \\ 1, & x > x_K \end{cases}$$

Para gerar NPAs desta distribuição a partir de um valor uniforme u basta escolher

$$w = \begin{cases} x_1, & 0 < u \leq p_1 \\ x_2, & p_1 < u \leq p_1 + p_2 \\ \vdots & \\ x_K, & \sum_{j=1}^{K-1} p_j < u < 1 \end{cases}$$

Ex 83

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{cases}$$

$u \rightarrow U(0,1)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.4, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Dado u escolho $w = \begin{cases} 0, & 0 < u \leq 0.4 \\ 1, & 0.4 < u \leq 0.6 \\ 2, & 0.6 < u \leq 0.7 \\ 3, & 0.7 < u \leq 1 \end{cases}$

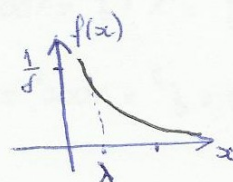
b)

u	0.9982	0.9373	0.1916	0.5737	0.9727	0.2889	0.4082
x	3	3	0	1	3	0	1

Distribuições Contínuas Importantes

2) Distribuição Exponencial

Def: Digo que a v.a. X com f.d.p. dada por



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{(x-\lambda)}{\delta}}, & x \geq \lambda \end{cases}$$

Segue uma distribuição exponencial de parâmetros λ e δ e escrevo $X \sim E(\lambda, \delta)$.

Prop:

- $E[X] = \lambda + \delta$

- $V[X] = \delta^2$

Propriedade da Falta de Memória: Se $X \sim E(\lambda = 0, \delta)$ então

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Ex 73

X - Duração (h) de um componente electrónico

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, & x \geq 0 \end{cases} \quad X \sim E(0, 1000)$$

a) $x < 0$ $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$

$x \geq 0$ $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}} dt = \left[-e^{-\frac{t}{1000}} \right]_0^x =$
 $= -e^{-\frac{x}{1000}} + 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{1000}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

b) $P(X \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\frac{1000}{1000}} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$

c) $P(1500 < X < 2000) = P(X < 2000) - P(X \leq 1500) = F(2000) - F(1500) =$
 $= 1 - e^{-\frac{2000}{1000}} - (1 - e^{-\frac{1500}{1000}}) = e^{-1.5} - e^{-2.0} \approx 0.09$

d) $E[X] = \lambda + \delta = 1000$

$$\sigma^2(X) = \delta^2 = 1000^2 = 1000000$$

$$\sigma = \sqrt{1000000} = 1000$$

e) L - Lixo

→
É uma variável discreta

$$L = \begin{cases} -2 & 4 \\ P(X < 1000) & P(X \geq 1000) \end{cases} \equiv \begin{cases} -2 & 4 \\ 0.63 & 0.37 \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_l l P(L=l) = -2 \times 0.63 + 4 \times 0.37 \approx 0.22$$

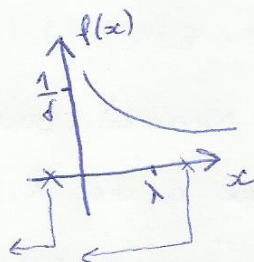
Aula 10 - 08/04/2013

Distribuições Contínuas Especiais

1) Distribuição Exponencial

$$X \sim E(\lambda, \delta)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{(x-\lambda)}{\delta}}, & x \geq \lambda \end{cases}, \delta \geq 0$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$x < \lambda \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 du = 0$$

$$x \geq \lambda \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} 0 du - \int_{\lambda}^x \frac{1}{\delta} e^{-\frac{(u-\lambda)}{\delta}} du = \left[-e^{-\frac{(u-\lambda)}{\delta}} \right]_{\lambda}^x =$$

$$= -e^{-\frac{(x-\lambda)}{\delta}} + 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \lambda \\ 1 - e^{-\frac{(x-\lambda)}{\delta}}, & x \geq \lambda \end{cases}$$

Ex 15

$N(t)$ - Número de carros que entram na auto-estrada em $[0, t]$

↑
discreta $N(t) \sim P(\delta t)$

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\delta t} (\delta t)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

a) T - tempo que o estudante espera pela passagem do 1º automóvel

↑
contínua

$$P(T > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\delta t} \times 1, t \geq 0$$

$$b) F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 1 - e^{-\delta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \therefore T \sim E(0, \frac{1}{\delta})$$

$$c) P(T > s+t | T \geq s) = \frac{P(T > s+t, T \geq s)}{P(T \geq s)} = \frac{P(T > s+t)}{1 - P(T \leq s)} = \frac{1 - P(T \leq s+t)}{1 - P(T \leq s)}$$

Foi adicionado
de propósito, para poder utilizar
a função distribuição 19

$$= \frac{1 - P(T \leq s+t)}{1 - (1 - e^{-\delta s})} = \frac{1 - (1 - e^{-\delta(s+t)})}{e^{-\delta s}} = \frac{e^{-\delta(s+t)}}{e^{-\delta s}} = e^{-\delta t} = P(T > t)$$

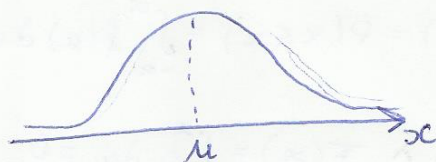
ou

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - (1 - e^{-\delta t}) = e^{-\delta t}$$

2) Distribuição Normal (Gaussiana)

Def: Digo que a v.a. X segue uma distribuição Normal de parâmetros μ e σ^2 e escrevo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se a sua f.d.p. for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



$$\rightarrow E[X] = \mu$$

$$\rightarrow V(X) = \sigma^2$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \text{X não se consegue calcular analiticamente}$$

• Se $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

$$Z \sim N(0, 1)$$

↑
Distribuição Normal
Reduzida ou Paduão

Prop:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

$Z \rightarrow \Phi(z) = P(Z \leq z)$ (Função distribuição de uma $N(0, 1)$ - Tabelado)

Ex. $X \sim N(2, 4)$

$$P(X < 3) = P\left(\underbrace{\frac{X-2}{2}}_Z < \frac{3-2}{2}\right) = P(Z < 0.5) = \Phi(0.5) = 0.6915$$

$$P(X < 1) = P\left(\underbrace{\frac{X-2}{2}}_Z < \frac{1-2}{2}\right) = P(Z < -0.5) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Simetria}}}{P(Z > 0.5)} = 1 - P(Z \leq 0.5) =$$

$$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

Ex 79

a) X - Duração da viagem (minutos)

$$X \sim N(20, 16)$$

$$P(X > 25) = P\left(\frac{X-20}{4} > \frac{25-20}{4}\right) = P(Z > 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) =$$

$$1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

$$b) P(X > 15) = P\left(Z > \frac{15-20}{4}\right) = P(Z > -1.25) = P(Z < 1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944$$

↑
simetria

$$c) P(15 < X < 25) = 1 - P(15 < X < 25) = 1 - P\left(\frac{15-20}{4} < Z < \frac{25-20}{4}\right)$$

$$= 1 - P(-1.25 < Z < 1.25) = 1 - (P(Z < 1.25) - P(Z < -1.25))$$

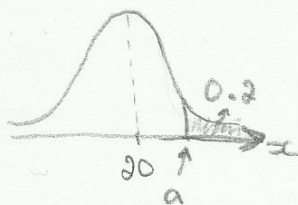
$$= 1 - (P(Z < 1.25) - P(Z > 1.25)) = 1 - (P(Z < 1.25) - (1 - P(Z < 1.25)))$$

↑
simetria

$$= 1 - (2P(Z < 1.25) - 1) = 1 - 2 \times 0.8944 + 1 = 0.2112$$



d)



$$a: P(X > a) = 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{a-20}{4}\right) = 0.2$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-20}{4}\right) = 0.2$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{a-20}{4}\right) = 0.8$$

$$\Rightarrow \frac{a-20}{4} = 0.84 \Leftrightarrow a = 23.36$$

e) Y - Número de viagens (em 3) em que ele demora mais de 25min

$$Y \sim B(3, p) \equiv B(3, 0.1056)$$

$$p = P(X > 25) \stackrel{a)}{=} 0.1056$$

$$P(Y=2) = \binom{3}{2} \times 0.1056^2 (1 - 0.1056)^1 = 0.03$$

Aula 11 - 10/04/2013

Prop: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e a, b são constantes então

$$Y = aX + b \sim N(\underbrace{a\mu + b}_1, \underbrace{a^2\sigma^2}_2)$$

Demonstrações:

$$1) E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = a\mu + b$$

$$2) V(Y) = V(aX + b) = a^2 V[X] = a^2 \sigma^2$$

Teorema: Se $X_1, X_2, \dots, X_k$ são v.a.'s tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e são independentes e se $a_1, a_2, \dots, a_k$ são constantes então

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k \sim N(a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_k \mu_k, a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_k^2 \sigma_k^2)$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k) = \\ &= V(a_1 X_1) + V(a_2 X_2) + \dots + V(a_k X_k) = \\ &= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_k^2 \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Ex 80

X_i - Peso do passageiro, $i = 1, \dots, 20$

$$X_i \sim N(75, 1) \quad \text{Tara Máxima: 8000kg}$$

Y_i - Peso da Bagagem do passageiro i , $i = 1, \dots, 20$

$$Y_i \sim N(15, 4)$$

W - Outro tipo de carga

$$W \sim N(6000, 1000000)$$

$$a) P(Y_i > 20) = P\left(\frac{Y_i - 15}{2} > \frac{20 - 15}{2}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \leq 2.5)$$

$$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

$$b) P(14 < Y_i < 20) = P\left(\frac{14 - 15}{2} < Z < \frac{20 - 15}{2}\right) = P(-0.5 < Z < 2.5) =$$

$$= P(Z < 2.5) - P(Z \leq -0.5) = P(Z < 2.5) - P(Z > 0.5) = P(Z < 2.5) - (1 - P(Z \leq 0.5))$$

↑
simetria

$$= 0.9938 - (1 - 0.6915) = 0.6853$$

$$c) c: P(X_i < 72) = 0.1587 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{72 - 75}{\sqrt{c}}\right) = 0.1587 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{\text{simetria}}{\Leftrightarrow} P\left(Z > \frac{75 - 72}{\sqrt{c}}\right) = 0.1587 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{75 - 72}{\sqrt{c}}\right) = 0.1587$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3}{\sqrt{c}}\right) = 0.8413 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{c}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{c} = 3 \Rightarrow c = 9$$

(tabela)

d) T - Peso total a ser embarcado

$$T = X_1 + \dots + X_{20} + Y_1 + \dots + Y_{20} + W$$

$$= \sum_{i=1}^{20} (X_i + Y_i) + W$$

T é uma combinação linear de v.a.'s normais independentes $\Rightarrow T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$

$$\mu_T = E(T) = E[X_1 + \dots + X_{20} + Y_1 + \dots + Y_{20} + W] =$$

$$= E[X_1] + \dots + E[X_{20}] + E[Y_1] + \dots + E[Y_{20}] + E[W] =$$

$$= 75 + \dots + 75 + 15 + \dots + 15 + 6000$$

$$= 75 \times 20 + 15 \times 20 + 6000 = 7800$$

$$\sigma_T^2 = V(T) = V(X_1 + \dots + X_{20} + Y_1 + \dots) =$$

$$= V(X_1) + \dots + V(X_{20}) + V(Y_1) + \dots + V(Y_{20}) + V(W)$$

$$= 16 + \dots + 16 + 4 + \dots + 4 + 1000000 =$$

$$= 1000400$$

$$T \sim N(7800, 1000400)$$

$$P(T < 8000) = P\left(z < \frac{8000 - 7800}{\sqrt{1000000}}\right) = P(z < 0.20) = \Phi(0.20) = 0.5793$$

—— // —— Sai até aqui!

Teorema Limite Central (TLC)

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ forem v.a's independentes identicamente distribuídas (i.i.d.)

com $E[x_i] = \mu$ e $V(x_i) = \sigma^2$ conhecidos e se

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i \text{ então } z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n\mu}{\sqrt{n} \sigma} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} N(0,1)$$

Notas:

$$\rightarrow n\mu = E[S_n] = E[x_1 + \dots + x_n] =$$

$$= \underbrace{E[x_1]}_{\mu} + \dots + E[x_n] = n\mu$$

$$\rightarrow n\sigma^2 = V(S_n) = V(x_1 + \dots + x_n) \quad \swarrow \text{xi's são } \perp$$

$$= \underbrace{V(x_1)}_{\sigma^2} + \dots + V(x_n) = n\sigma^2$$

$\rightarrow$ Na prática, a aproximação é boa para n grande. 30 é um número bom

$$z = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} N(0,1)$$

Ex 84

x_i - Erro de arredondamento no nº i , $i = 1, \dots, 1200$

$$E[x_i] = 0, \quad V(x_i) = \frac{1}{12}$$

$$T = \text{Erro total cometido} \quad T = \sum_{i=1}^{1200} x_i$$

$P(T \leq 15.4)$, estando nas condições do TLC (... enunciar as condições) podemos então aproximar a distribuição desconhecida de T :