Ex 44

$$X \begin{cases} 50 & 100 & 150 & 200 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{cases}$$

a) $p(X>100) = ?$

$$p(X>100) = p(X=150) + p(X=200) = 0{,}4$$

b) ~~...~~ $p(X=200 \mid X>100) = ?$

$$p(X=200 \mid X>100) = \frac{p(X=200 \cap X>100)}{p(X>100)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$$

c) $E(X) = ?$

$$E(X) = 50 \times 0{,}2 + 100 \times 0{,}4 + 150 \times 0{,}3 + 200 \times 0{,}1$$

$$E(X) = 115$$

d)

Seja $L(x)$ a função que determina o lucro:

$L(50) = 37{,}5$

$L(100) = 75$

$L(150) = 92{,}5$

$L(200) = 110$

Seja agora L a v.a. do lucro diário:

$$L \begin{cases} 37{,}5 & 75 & 92{,}5 & 110 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{cases}$$

A função de probabilidade do lucro diário, $F(x)$, é a seguinte:

$$F(x) = \begin{cases} 0 , & x < 37{,}5 \\ 0{,}2 , & 37{,}5 \leq x < 75 \\ 0{,}6 , & 75 \leq x < 92{,}5 \\ 0{,}9 , & 92{,}5 \leq x < 110 \\ 1 , & 110 \leq x \end{cases}$$

e) $E(L) = 37{,}5 \times 0{,}2 + 75 \times 0{,}4 + 92{,}5 \times 0{,}3 + 110 \times 0{,}1$

$= 76{,}25$

$\sigma(L) = \sqrt{V(L)} = \sqrt{E((L - E(L))^2)} = \sqrt{E((L - 76{,}25)^2)}$

$= \sqrt{E(L^2) - (76{,}25)^2} = 22{,}23$

Ex 45

Seja X a v.a. associada ao valor que o jogador recebe:

$$X \begin{cases} 5 & 10 & x \\ 2/13 & 2/13 & 9/13 \end{cases}$$

Para ter um jogo equilibrado em termos de ganho médio:

$E(X) = 0 \Leftrightarrow 5 \times 2/13 + 10 \times \frac{2}{13} + x \times \frac{9}{13} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{10}{13} + \frac{20}{13} + \frac{9x}{13} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{30}{13} + \frac{9x}{13} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9x}{\cancel{13}} = -\frac{30}{\cancel{13}} \Leftrightarrow 9x = -30 \Leftrightarrow x = \frac{-30}{9} = \frac{-10}{3}$

O jogador deverá pagar 10/3.

Ex 46

$p(A) = \frac{3}{8}$

$p(\bar{A}) = \frac{5}{8}$

a) $p(X=0) = \frac{C_4^5}{C_4^8} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$

$p(X=1) = \frac{C_3^5 \times C_1^3}{C_4^8} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

$p(X=2) = \frac{C_2^5 \times C_2^3}{C_4^8} = \frac{3}{7}$

$p(X=3) = \frac{C_1^5 \times C_3^3}{C_4^8} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{14} & 3/7 & 3/7 & 1/14 \end{cases}$$

b) $p(X \leq 2 \wedge X \geq 0) = ?$

$p(X \leq 2 \wedge X > 0) = p(X=1) + p(X=2) = \frac{6}{7}$

c) $E(X) = ?$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{14} = 1{,}5$

$V(X) = E(X - E(X)^2) = E(X^2) - E^2(X) = 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{3}{7} + 3^2 \times \frac{1}{14} - (1{,}5)^2$
$= 0{,}53$

Ex 47

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}75 & 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}15 \end{cases}$$

a)

i) $p(X < 3 \wedge X > 0) = p(X=1) + p(X=2) = 0{,}02 + 0{,}08 = 0{,}1$

ii) $p(X \leq 2) = p(X=2) + p(X=1) + p(X=0) = 0{,}85$

b)

i) $p(X=3 \mid X>0) = \frac{p(X=3 \cap X>0)}{p(X>0)} = \frac{p(X=3)}{p(X>0)} = \frac{0{,}15}{0{,}25}$

$= 0{,}6$

ii) $p(1 \leq X \leq 3 \mid X \leq 2) = \frac{p(1 \leq X \leq 3 \cap X \leq 2)}{p(X \leq 2)} = \frac{p(1 \leq X \leq 2)}{p(X \leq 2)}$

$= \frac{0{,}1}{0{,}85} = 0{,}11$

c) $E(X) = 0 \times 0{,}75 + 1 \times 0{,}02 + 2 \times 0{,}08 + 3 \times 0{,}15 = 0{,}63$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1{,}69 - (0{,}63)^2 = 1{,}2931$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}137$

d) Seja P a v.a. associada ao prejuízo de cada remessa

$$P \begin{cases} -50 & -150 & -250 & -350 \\ 0{,}75 & 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}15 \end{cases}$$

$E(P) = \cancel{0 \times 0{,}75} - 50 \times 0{,}75 - 150 \times 0{,}02 - 250 \times 0{,}08 - 350 \times 0{,}15$

$E(P) = -113$

$V(P) = E(P^2) - (E(P))^2 = ((-50)^2 \times 0{,}75 + (-150)^2 \times 0{,}02 + (-250)^2 \times 0{,}08 + (-350)^2 \times 0{,}15) - (-113)^2 = 12931$

$\sigma(P) = \sqrt{V(P)} = 113{,}71$

Ex 6.

a) $5! = 120$

b) $\underline{4}\ \ \underline{3}\ \ \underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{1}$

$4! \times 1 = 4! = 24$

c) $\underline{3} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{1}$ $\quad 3 \times 2 \times 2 = 12$

Ex 10

$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1}$

$$A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

Ex 12

a) $\underline{23} \times \underline{23} \times \underline{10} \times \underline{10}$ $\quad (23 \times 23 \times 10 \times 10) \times C_2^4$

$$= 23^2 \times 10^2 \times \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$$

b) $A_2^{23} \times A_2^{10} \times C_2^4$

Ex. 16

a) $C_2^5 \times C_3^7 = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{2!}} \times \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,\cancel{3!}}$

$= 350$

b) $C_2^5 \times C_2^6 \times 1 = 150$

c) $C_2^3 \times C_3^7 = 105$

Teorema de probabilidade total

Partição de espaços:

Dizemos que $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ é uma partição de Ω quando $E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j)$ e $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = \Omega$

Teorema:

Seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ uma partição de Ω, com $P(E_i) > 0, \forall i$.
Dado um qualquer acontecimento A, tem-se:

$$\boxed{P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \cdots + P(A|E_m)P(E_m)}$$

Teorema de Bayes:

Seja $\{E_1, \ldots, E_m\}$ uma partição de Ω, com $P(E_i) > 0, \forall i$.
Dado um qualquer acontecimento A, com $P(A) > 0$, tem-se

$$\boxed{P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(A|E_i)P(E_i)}}$$

Exemplo :

Máquina A => 15% produção

Máquina B => 25% produção

Máquina C => 60% produção

Máq. A -> 5% defeituosos

Máq. B -> 7% defeituosos

Máq. C -> 4 ~~0~~% defeituosos.

~~Assim~~

D -> o botão ~~não~~ tem defeito.

Se for encontrado um botão defeituoso, da produção total, a probabilidade de ser produzido por B é 36%. Verdadeiro ou falso?

$P(A) = 0.15$

$P(B) = 0.25$

$P(C) = 0.6$

$P(D|A) = 0.05$

$P(D|B) = 0.07$

$P(D|C) = 0.04$

$P(B|D) = ?$

~~P(B|D) =~~

Utilizando o teorema de Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)\,P(B)}{P(D)} = \frac{0.07 \times 0.25}{(0{,}05 \times 0{,}15) + (0{,}07 \times 0{,}25) + (0{,}04 \times 0{,}6)}$$

Ex 35

M -> probabilidade de mau tempo

C -> probabilidade de colisão

$P(M) = 2/3$

$P(C|M) = 1/4 \Rightarrow P(\bar{C}|M) = \frac{3}{4}$

$P(\bar{C}|\bar{M}) = 5/6 \Rightarrow P(C|\bar{M}) = 1/6$

a) $P(\bar{C}) = ?$

$$P(\bar{C}|\bar{M}) = \frac{P(\bar{C}\cap\bar{M})}{P(\bar{M})} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{P(\overline{C\cup M})}{1/3} \Leftrightarrow P(\overline{C\cup M}) = \frac{5}{18}$$

$$P(C|M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} \Leftrightarrow P(C\cap M) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(C\cap M) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(C\cap M) = P(C)\cdot P(M) - P(C\cup M)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = P(C)\cdot\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{5}{18}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = P(C)\cdot\frac{2}{3} - \frac{13}{18} \Leftrightarrow \underset{(3)}{\frac{1}{6}} + \frac{13}{18} = \underset{(6)}{\frac{2}{3}}\cdot P(C)$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \frac{16}{18} = \frac{2}{3}P(C) \Leftrightarrow \frac{8}{9} = \frac{2}{3}P(C) \Leftrightarrow P(C) = \frac{3\times 8}{2\times 9}}$$

$$P(\bar{C}) = P(\bar{C}|M)P(M) + P(\bar{C}|\bar{M})P(\bar{M})$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{C}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

b) $P(\bar{M} \mid C) = ?$

Aplicando o teorema de Bayes:

$$P(\bar{M} \mid C) = \frac{P(C \mid \bar{M}) \cdot P(\bar{M})}{P(C \mid \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) + P(C \mid M) \cdot P(M)}$$

$$= \frac{P(C \mid \bar{M}) \cdot P(\bar{M})}{P(C)} = \frac{P(C \mid \bar{M}) \cdot P(\bar{M})}{(1 - P(\bar{C}))}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{7}{9}} = \frac{1}{4}$$

Ex 42

$A_i \rightarrow$ ~~probabilidade~~ acertar no alvo ~~pelo~~ o i-ésimo tiro

~~P(A_i) = 0,6~~

Assumindo a independência entre o resultado dos tiros

a) Em cinco tiros acertar três $\rightarrow S$

A_1 $P\left((A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5) \cup P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\right)$

Como os acontecimentos são independentes:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) + P(A_1 \dots) + P(\bar{A}_1 \cap \dots)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\bar{A}_4) \cdot P(\bar{A}_5) + \dots$$

$$= (0,6)^3 \cdot (0,4)^2 \cdot n$$

$$n = C_2^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\ \cancel{2!}} = 10$$

$$P(S) = 10 \times (0,6)^3 \cdot (0,4)^2$$

b) Acertar pela terceira vez ao quinto tiro $\rightarrow S$

As sequências que satisfazem S são C^4_2.

Por exemplo:

$$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$$

$$\boxed{P(S) = C^4_2 \times (0,6)^3 \times (0,4)^2}$$

c) Serem necessários exatamente dez tiros para acertar um $\rightarrow S$

$$\boxed{P(S) = (0,4)^9 \times (0,6)}$$

d) Necessitar de, pelo menos, 4 tiros para acertar 2 $\rightarrow S$

$$P(S) = 1 - (P(\text{"Acertar 2 em 3"}) \quad)$$

$$= 1 - ((0,6)^2 \times 0,4 \times C^3_2 \quad)$$

$$= 1 - ((0,6)^2 \times 0,4 \times 3 \quad)$$

$$\frac{3!}{1!\,2!} \quad 3$$

$$P(S) = P(\text{"Acertar zero em 3"}) + P(\text{"Acertar 1 em 3"})$$

$$= (C^3_0 \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^3) + (C^3_1 \, (0,6)^1 \cdot (0,4)^2)$$

$$= (0,4)^3 + (3 \times 0,6) \times (0,4)^2$$

Ex 43

a) $X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ P(X=0) & P(X=2) & P(X=4) \end{cases}$

$P((X=0) \cup (X=2)) = 0{,}8 \iff P(X=0) + P(X=2) = 0{,}8 \iff$

$\iff P(X=4) = 0{,}2$

$P(X=0) = \frac{3}{2} P(X=4) \iff P(X=0) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

$P(X=2) = 0{,}5$

$X \begin{cases} 0 & 2 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{cases}$

b) $P(0 < X < 4) = P(X=2) = 0{,}5$

c) $Y = \min(X, 2)$

$Y \begin{cases} 0 & 2 \\ P(X=0) & P(X=2 \lor X=4) \\ \shortparallel & \shortparallel \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{cases}$

Ex 36

D -> descansarem

P -> fazer férias na praia

C -> férias no campo

N -> férias em casa

$p(P) = 0{,}5$

$p(C) = 0{,}3$

$p(N) = 0{,}2$

$p(D|P) = 0{,}4$

$p(D|C) = 0{,}6$

$p(D|N) = 0{,}5$

a) $p(D) = ?$

Pelo teorema da probabilidade total:

$$p(D) = p(D|P) \cdot p(P) + p(D|C) \cdot p(C) + p(D|N) \cdot p(N)$$

$$p(D) = 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}2$$

$$\boxed{p(D) = 0{,}48}$$

b) $\max\left(p(P|D),\ p(C|D),\ p(N|D) \right) = ?$

As 3 probabilidades são calculadas através do teorema de Bayes:

$$p(P|D) = \frac{p(D|P)\ p(P)}{p(D)} = 0{,}416$$

$$p(C|D) = \frac{p(D|C)\ p(C)}{p(D)} = 0{,}375$$

$$p(N|D) = \frac{p(D|N)\ p(N)}{p(D)} = 0{,}208$$

A alternativa mais provável de ter sido escolhida foi a praia.

Ex 34

A -> o funcionário é bem adaptado à tarefa que desempenham

S -> ter nota igual ou superior a n

$p(S) = 0.6 \Rightarrow p(\bar{S}) = 0,4$

$p(A|S) = 0,7 \Rightarrow p(\bar{A}|S) = 0,3$

$p(A|\bar{S}) = 0,5 \Rightarrow p(\bar{A}|\bar{S}) = 0,5$

a) $p(A) = ?$

Usando o teorema da probabilidade total tem-se que:

$$p(A) = p(A|S) \cdot p(S) + p(A|\bar{S}) \cdot p(\bar{S})$$

$$p(A) = 0,7 \times 0,6 + 0,5 \times 0,4$$

$$\boxed{p(A) = 0,62}$$

b) $p(\bar{S}|A) = ?$

Usando o teorema de Bayes tem-se que:

$$p(\bar{S}|A) = \frac{p(\bar{S} \cap A)}{p(A)}$$

$$p(\bar{S}|A) = \frac{p(A|\bar{S})\, p(\bar{S})}{p(A)}$$

$$p(\bar{S}|A) = \frac{0,5 \times 0,4}{0,62}$$

$$\boxed{p(\bar{S}|A) \simeq 0,32}$$

Ex. 37

X -> ser xiloto

B -> ser boceme

$p(X) = 0{,}6$

$p(B) = 0{,}4$

A -> Apoiar o pp

$p(A|X) = 0{,}7$

$p(A|B) = 0{,}3$

a) $p(A) = ?$

Pelo teorema de probabilidade total:

$$p(A) = p(A|X) \cdot p(X) + p(A|B) \cdot p(B)$$

$$p(A) = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4$$

$$p(A) = 0{,}54$$

$\boxed{\text{54 \% da população}}$

b) $p(B|A) = ?$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A|B) \cdot p(B)}{p(A)}$$

$$p(B|A) = \frac{0{,}3 \times 0{,}4}{0{,}54}$$

$$\boxed{p(B|A) = 0{,}22}$$

c) p → ser patriota

$P = X \cup A$

$\Leftrightarrow p(P) = p(X) + p(A) - p(X \cap A)$

$\Leftrightarrow p(P) = p(X) + p(A) - (p(A|X) \cdot p(X))$

$\Leftrightarrow p(P) = 0{,}6 + 0{,}54 - 0{,}7 \times 0{,}6$

$\Leftrightarrow \boxed{p(P) = 0{,}762}$

Ex 39

A e B são acontecimentos independentes, logo

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$\cancel{p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p(B) - p(A \cup \overline{B})}$

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\cancel{p(A)} \cdot p(B)}{\cancel{p(A)}} = p(B)$$

Mas $p(B|A) = 1 - p(\overline{B}|A)$

$\Leftrightarrow p(\overline{B}|A) = 1 - p(\overline{B}|A)$ $\cancel{= 1 - p(B)}$

$\Leftrightarrow p(\overline{B}|A) = 1 - p(B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = 1 - p(B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{p(\overline{B} \cap A)}{p(A)} = p(\overline{B})$

$\Leftrightarrow \boxed{p(\overline{B} \cap A) = p(\overline{B}) \cdot p(A)}$

Ex 40

$C_i \rightarrow$ pessoa 'i' se curar

$p(C_1) = 0{,}25$

$p(C_2) = 0{,}15$

$p(C_3) = 0{,}1$

a) ~~$p(\bar{C_1})$~~ $p(\bar{C_1} \cap \bar{C_2} \cap \bar{C_3}) = ?$

Como os acontecimentos são independentes:

$$p(\bar{C_1} \cap \bar{C_2} \cap \bar{C_3}) = p(\bar{C_1}) \times p(\bar{C_2}) \times p(\bar{C_3})$$

$$= 0{,}75 \times 0{,}85 \times 0{,}9$$

$$= 0{,}57375$$

b) Pelo menos dois se curarem $\rightarrow S$

$$p(S) = p(\bar{C_1} \cap C_2 \cap C_3) + p(C_1 \cap \bar{C_2} \cap C_3) + p(C_1 \cap C_2 \cap \bar{C_3}) + p(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$$

$$p(S) = 0{,}75 \times 0{,}15 \times 0{,}1 + 0{,}25 \times 0{,}85 \times 0{,}1 + 0{,}25 \times 0{,}15 \times 0{,}9 + 0{,}25 \times 0{,}15 \times 0{,}1$$

$$\boxed{p(S) = 0{,}07}$$

Ex 41

$F \rightarrow$ o motor falhar

$p(F) = p$

$S_1 \rightarrow$ fazer voo com sucesso num bimotor

$S_2 \rightarrow$ " " " " " quadrimotor

$$p(S_1) = p(F_1 \cap F_2) + p(\bar{F_1} \cap F_2) + p(F_1 \cap \bar{F_2})$$

$$p(S_2) = C^4_2 \times p^2 \times (1-p)^2 + C^4_1 \times p^3 \times (1-p) + C^4_0 \; p^4$$

$$p(S_1) = p^2 + 2 \times p \times (1-p) = p^2 + 2p - 2p^2 = \boxed{2p - p^2}$$

$$p(S_2) = 6 \times p^2 \times (1-p)^2 + 4 \times p^3 \times (1-p) + p^4 = 6p^2 \times (1 + p^2 - 2p) + 4p^3 - 4p^4 + p^4$$

$$= 6p^2 + 6p^4 - 12p^3 + 4p^3 - 3p^4$$

$$= 3p^4 - 8p^3 + 6p^2 = p^2(3p^2 - 8p + 6)$$

$p(S_1) > p(S_2)$

$\Leftrightarrow \cancel{p}(2-p) > p^{\cancel{2}}(3p^2 - 8p^{\cancel{3}} + 6)$

$p>0$

$\Leftrightarrow 2 - p > (3p^2 - 8p + 6)p$

$\Leftrightarrow 3p^3 - 8p^2 + 6p + p - 2 < 0$

$\Leftrightarrow 3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{0 < p < \frac{2}{3}}$