UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

Ano lectivo 2008/09
1º teste - 22 de Abril de 2009
Duração: 1h30

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

(1.5) 1. Considere os acontecimentos A e B, verificando $P(A) = 1/3$ e $P(B|\overline{A}) = 1/4$. Calcule $P(A \cup B)$.
R:

$$P(B|\overline{A}) = 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(B \cap \overline{A})}{1 - P(A)} = 1/4 \quad \Leftrightarrow \quad P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/6 = 1/2$.

(4.5) 2. Seja (X, Y) um par aleatório discreto com função de probabilidade conjunta:

$X\backslash Y$	0	1	
0	$0.25 + c$	$0.25 - c$	
1	$0.25 - c$	$0.25 + c$	

(a) Para que valor(es) de c, a função da tabela anterior é uma função de probabilidade conjunta?

Considere nas restantes alíneas $c = 0.15$.

(b) Calcule a $P(X + Y = 1)$.

(c) Determine coeficiente de Correlação do par (X, Y). Comente o resultado.

(d) Calcule o valor médio e a variância da variável aleatória $W = 2X - Y$.

R:

(a) Qualquer função de probabilidade conjunta verifica:
1) $0 \leq P(X = i, Y = j) \leq 1$, para qualquer par (i, j).
2) $\sum_i \sum_j P(X = i, Y = j) = 1$.

A condição 2) é verificada para qualquer valor de c.
A condição 1) é verificada desde que $0 \leq 0.25 + c \leq 1$ e $0 \leq 0.25 - c \leq 1$, ou seja $-0.25 \leq c \leq 0.25$.

(b) $P(X + Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = 0.1 + 0.1 = 0.2$

(c) $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.4 - 0.5 \times 0.5 = 0.15$
$\rho(X, Y) = 0.6$.

(d) $E(W) = 2E(X) - E(Y) = 0.5$, $\quad V(W) = 4V(X) + V(Y) - 4Cov(X, Y) = 0.65$

(5.0) 3. Um aeroporto tem um aparelho de scanner de bagagens de raio gama dotado de um programa de inteligência artificial, baseado em redes neuronais. Esse aparelho detecta armas em malas, com uma pequena taxa de erro: em 2% dos casos o scanner acusa positivo quando não existem armas e em 2% dos casos acusa negativo quando existem armas. Assuma que a probabilidade de uma mala conter uma arma seja igual a 0.001.

(a) Escolhida uma mala ao acaso:

i. Qual a probabilidade do aparelho acusar positivo?

ii. Se a mala acciona o alarme, qual a probabilidade de que ela contenha de facto uma arma?

(b) Escolhidas 10 malas ao acaso, qual a probabilidade de duas delas conterem armas?

(c) Admita que o número de vezes que o alarme do aparelho de scanner é accionado é um processo de Poisson de média 1.6/hora.

i. Qual o tempo médio entre ocorrências consecutivas? Justifique.

ii. Qual a probabilidade do alarme do aparelho de scanner não ser accionado durante 2 horas?

R:

(a) Considere os acontecimentos: A - a mala tem uma arma; P - o scanner acusa Positivo. Temos: $P(A) = 0.001$; $P(P|\overline{A}) = 0.02$; $P(\overline{P}|A) = 0.02$.

i. Então aplicando o Teorema da Probabilidade Total, $P(P) = P(P|\overline{A})P(\overline{A}) + P(P|A)P(A) = 131/6250$.

ii. Aplicando o Teorema de Bayes, $P(A|P) = \frac{P(P|A)P(A)}{P(P)} = 49/1048 = 0.046756$.

(b) Seja X a v.a. que representa o número de malas com armas, entre as 10 malas seleccionadas. Como as malas foram seleccionadas aleatoriamente e todas têm a mesma probabilidade de conter armas, $X \sim Bin(10, 0.001)$. Assim, $P(X = 2) = 4.46 \times 10^{-5}$.

(c) i. Como o número de vezes que o alarme do aparelho de scanner é accionado é um processo de Poisson de média 1.6/hora, sabemos que o tempo entre ocorrências consecutivas tem distribuição $Exp(1.6)$. Logo o tempo médio entre ocorrências consecutivas é 1/1.6=0.625 horas, isto é, 37.5 minutos.

ii. Seja Y a v.a. que representa o número de vezes que o alarme do aparelho de scanner é accionado durante 2 horas. Como $Y \sim P(2 \times 1.6)$, resulta que $P(Y = 0) = 0.040762$.

(4.5) 4. Um posto de gasolina é reabastecido uma vez por semana. As vendas do passado sugerem que a função densidade de probabilidade do volume de vendas semanais de gasóleo, X, medido em dezenas de milhares de litros (10^4 litros), é:

$$\begin{cases} x-1, & 1 < x \leq 2, \\ 3-x, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{outros valores de } x; \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade do volume de gasóleo vendido, numa semana, se situar entre 1.5 e 2.3 dezenas de milhares de litros.

(b) Sabendo que $E(X^2) = 25/6$, calcule o valor esperado, o desvio padrão e o coeficiente de variação do volume de gasóleo vendido por semana.

(c) Admita que o posto de gasolina vende cada litro de gasóleo a 0.98€ e compra a 0.91€. Qual o lucro médio semanal obtido com a venda de gasóleo (ignore quaisquer outros custos/receitas)?

R:

(a) $P(1.5 < X < 2.3) = \int_{1.5}^{2} x - 1 \; dx + \int_{2}^{2.3} 3 - x \; dx = 0.63$

(b) $E(X) = \int_{1.5}^{2} x(x-1) \; dx + \int_{2}^{2.3} x(3-x) \; dx = 2.$
$V(X) = E((X - E(X))^2) = 25/6 - 4 = 1/6 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6}/6$. $CV(X) = 50\sqrt{6}/6\%$.

(c) O lucro médio semanal é $E(10^4 \times 0.07X) = 1400$€.

(4.5) 5. O peso de uma amêndoa de chocolate de uma dada marca é normalmente distribuído com média de 5 gramas e desvio padrão de 0.2 gramas. Determine:

(a) a probabilidade de, uma amêndoa de chocolate escolhida aleatoriamente, pesar mais de 4.75 gramas.

(b) a probabilidade de uma embalagem, com 100 amêndoas, ter um peso máximo de 502.5 gramas.

(c) o intervalo de peso, centrado no valor médio, que contém 95% dos pesos das amêndoas.

(d) Utilizou, ou poderia ter utilizado, o Teorema Limite Central nalguma das alíneas anteriores? Justifique.

R:

(a) $P(X > 4.75) = 1 - \Phi(\frac{4.75-5}{0.2}) = \Phi(1.25) = 0.8944$.

(b) Seja X_i a v.a. que representa o peso da i-ésima amêndoa da embalagem.
Admitindo-se que os pesos das amêndoas são mutuamente independentes, isto é, que as v.a.'s $X_1, ..., X_{100}$ são mutuamente independentes, então $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ tem distribuição normal de valor médio $E(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 500$ e variância $V(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} V(X_i) = 4$. Logo,

$$P(S_{100} \leq 502.5) = \Phi(\frac{502.5 - 500}{2}) = \Phi(1.25) = 0.8944.$$

(c) $P(5 - a < X < 5 + a) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(\frac{5-a-5}{0.2}) - \Phi(\frac{5+a-5}{0.2}) = 0.95 \Leftrightarrow \Phi(a/0.2) = 0.975$, tendo-se $a = 0.392$. Logo o intervalo $]4.608, 5.392[$ contém 95% dos pesos das amêndoas.

(d) O Teorema Limite Central poderia ter sido utilizado para calcular a probabilidade pedida em (b).