FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Probabilidades e Estatística

2º teste - 26 de Junho de 2009
Duração: 1h45

Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

(4.5) 1. Pretende-se modelar o peso de pintos Y, em gramas, com a idade x, em semanas. Para tal registaram-se 10 valores da idade e o correspondente peso.

Idade, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso, Y	60	100	120	150	200	210	310	320	330	360

$$S_{YY} = 105040 \qquad \sum x_i^2 = 385 \qquad \bar{x} = 5.5 \qquad \sum Y_i x_i = 14780$$

(a) Estime os parâmetros da recta de regressão linear simples, e a variância dos erros, σ^2.

(b) Estime o peso de um pinto a meio da 8ª semana, isto é, quando $x = 8.5$.

(c) Teste a hipótese de o verdadeiro declive da recta de regressão ser nulo, a 5% de significância.

Solução:

(a) $\hat{\beta}_0 = 22.667$, $\hat{\beta}_1 = 35.152x$, $\hat{\sigma}^2 = 387.58$.

(b) $\hat{Y}(8.5) = 22.667 + 35.152 \times 8.5 = 321.459$.

(c) $H_0 : \beta_1 = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$
Estatística de teste:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \underset{Sob\, H_0}{\sim} t_{n-2}$$

Região de rejeição do teste:

$$R_{0.05} =]-\infty; -t_{8,0.025}[\cup]t_{8,0.025}; +\infty[=]-\infty; -2.31[\cup]2.31; +\infty[$$

Como $t_{obs} = 16.218 \in R_{0.05}$, rejeita-se H_0 ao nível de significância 5%.

(9.0) 2. Considere a seguinte amostra, de dimensão $n = 30$, do número de clientes atendidos por hora em certo posto de venda:

41	30	28	40	28	26	28	41	30	34	40	36	30	20	43
35	36	20	42	43	42	40	32	26	28	41	34	24	42	40

Nos testes que tiver de fazer, considere um nível de significância de 5%.

(a) Estime pontualmente a proporção de horas em que são atendidos mais de 36 clientes.

(b) Deduza e calcule um intervalo de 90% de confiança para o parâmetro estimado na alínea anterior.

(c) Podemos considerar a amostra aleatória?

(d) Calcule o valor-p do teste realizado na alínea anterior.

(e) Pretende-se verificar se o número de clientes, atendidos por hora, segue uma distribuição **Normal** de valor médio 34 e desvio padrão 7. Considere as classes:

Classe	O_i	E_i
$]-\infty; 26]$		
$]26; 36]$		
$]36; 40]$	4	
$]40; \infty[$	8	5.870

Solução:

i. $\hat{p} = \frac{12}{30} = 0.4$

ii. A dedução do IC encontra-se na sebenta.
$IC_{90\%}(p) =]0.253 \ ; \ 0.547[$

iii. Pretende-se testar: H_0 : A amostra é aleatória vs H_1 : A amostra não é aleatória.
Estatística de teste: $Z = \frac{V-(2n-1)/3}{\sqrt{((16n-29)/90)}} \underset{Sob\, H_0}{\sim} N(0,1)$.
Temos $v_{obs} = 17$ e $z_obs = -1.19$.
Região de rejeição do teste: $R_{0.05} =]-\infty; -1.96[\cup]1.96; +\infty[$ Logo não se rejeita H_0 ao nível de significância 5%.

iv. $valor - p = 2\min(P(Z < -1.19|H_0), P(Z > -1.19|H_0)) = 0.23$

v. Pretende-se testar: $H_0 :\ X \sim N(34, 7^2)$ vs $H_1 : \nsim N(34, 7^2)$.

Classe	O_i	E_i
$]-\infty; 36]$	18	18.374
$]36; 40]$	4	5.755
$]40; \infty[$	8	5.870

$\chi^2_{obs} = 1.32$. Região de rejeição do teste: $R_{0.05} =]5.99; +\infty[$. Não se rejeita H_0 ao nível de significância 5%.

(4.0) 3. A proporção de sumo de pêssego existente numa garrafa de *Ice Tea* de pêssego, é uma variável aleatória X com função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}, & 0 < x \leq \theta, \\ \frac{2(1-x)}{1-\theta}, & \theta < x < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } x; \end{cases}$$

em que $\theta \in]0, 1[$ é um parâmetro desconhecido. Sabe-se que $E(X) = \frac{1+\theta}{3}$ e $V(X) = \frac{1-\theta+\theta^2}{18}$.

(a) Determine o estimador de θ, usando o método dos Momentos.

(b) Admitindo que o estimador obtido na alínea anterior é centrado, verifique se também é consistente.

(c) A partir de 5 garrafas de *Ice Tea*, provenientes de lotes diferentes, obtiveram-se as seguintes proporções de sumo de pêssego: 0.29, 0.37, 0.42, 0.35, 0.44. Estime o parâmetro θ.

Solução:

(a) O estimador dos momentos é dado pela solução da equação $E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \theta = 3\bar{X} - 1$, isto é

$$\hat{\Theta} = 3\bar{X} - 1.$$

(b) $V(\hat{\Theta}) = \frac{9V(X)}{n} = \frac{1-\theta+\theta^2}{2n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo $\hat{\Theta}$ é consistente.

(c) Como $\bar{x} = 0.374$, a estimativa de θ é $\hat{\theta} = 3 \times 0.374 - 1 = 0.122$.

(2.5) 4. Considere a variável aleatória X com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} e^{5(x-1)}, & x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

Sejam $u_1 = 0.1517$ e $u_2 = 0.6437$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0, 1)$. Usando o método da Transformação Inversa, calcule dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X.

Solução: Seja u um NPA da distribuição $U(0, 1)$.
Como $F(x) = u \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\ln u}{5}$, $0 < u < 1$, os NPA's obtidos pelo método da transformação inversa são: 0.6228 e 0.9119.