Probabilidades e Estatística

1º teste - 28 de Abril de 2010
Duração: 1h45

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

(6.0) 1. Admite-se que o tempo que decorre até surgir a primeira avaria de um certo modelo de computador segue uma distribuição **Normal** com valor esperado 4.8 anos e desvio padrão 1.3 anos. Os computadores que se avariam no período de garantia são substituídos.

(a) Se for dada uma garantia de 2 anos, qual a proporção de computadores que são substituídos dentro do prazo de garantia?

(b) Se o fabricante só desejar substituir 0.5% dos computadores, qual deverá ser o período de tempo dado como garantia?

(c) O fabricante assegura mais um ano de garantia, mediante o pagamento de uma pequena quantia. Num lote de 500 computadores, qual o número esperado de computadores, substituídos durante o período adicional de garantia (entre o 2º e o 3º ano)?

(d) Uma loja adquiriu um lote de 18 computador, dos quais 5 possuem um módulo de memória com defeito. Se o primeiro cliente adquirir 5 desses computadores, qual a probabilidade de 3 deles terem defeito (no módulo de memória)?

(2.0) 2. Considere os acontecimentos A e B de um espaço de resultados Ω. Indique, justificando se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa:

$$P(A \cap B) \geq P(A) - P(\overline{B})$$

(4.0) 3. Três máquinas produzem a totalidade das peças de uma fábrica. A máquina A produz o dobro da máquina B e esta (B) o mesmo que a máquina C. Algumas daquelas peças são defeituosas, verificando-se que a percentagem de peças defeituosas em cada uma das máquinas A, B e C é, respectivamente, 2%, 3% e 5%.

(a) Escolhendo uma peça ao acaso determine:

i. a probabilidade de esta peça ser defeituosa

ii. tendo-se verificado que a peça tem defeito, qual a probabilidade de ter sido produzida na máquina C?

(b) Qual a percentagem de peças que são produzidas pela máquina A e não são defeituosas?

(4.5) 4. O Paulo percorre todos os dias o mesmo percurso, nas suas deslocações entre a sua casa e o local de trabalho. O consumo de combustível do seu automóvel (em litros), por cada dia, é uma variável aleatória X, com f.d.p dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{254}x^2, & 6 \leq x \leq 7 \\ 8 - x, & 7 < x \leq 8 \\ 0, & outros\ valores \end{cases}$$

(a) Qual o consumo médio diário?

(b) Determine a função de distribuição de X.

(c) Calcule a mediana da variável aleatória X.

(d) Qual a probabilidade de, num determinado dia, o consumo deste automóvel ser superior a 6.2 litros?

(3.5) 5. Seja (X, Y) um par aleatório discreto com função de probabilidade conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2	
-1				$1/2$
1				$1/2$
	$1/6$	$2/3$	$1/6$	

(a) Sabendo que $P(X = Y) = 1/2$, complete a tabela.

(b) Calcule o coeficiente de correlação.

(c) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.

Formulário

	$P(X=x)$ ou $f(x)$	$E(X)$	$V(X)$
$Unif(n)$	$\frac{1}{n}, \quad x = 1, \ldots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$Bin(n,p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n, \quad 0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
$G(p)$	$p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots, \quad 0 < p < 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$H(N,M,n)$	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+M) \leq x \leq \min(M,n)$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0$	λ	λ
$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda\, e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$Gama(\alpha, \lambda)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{N}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$

Função de distribuição da Normal reduzida

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}t^2\right) dt$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

Nota: Para $z \geq 4$, $\Phi(z) \approx 1$.