



Aviso: Trata-se da solução dos exercícios. Faltam muitos dos cálculos e justificações necessárias.

1. Nota: A População é normal com variância desconhecida.

- (a) Pretende-se testar: $H_0 : \sigma^2 \leq 0,5$ vs $H_1 : \sigma^2 > 0,5$.
Estatística de teste:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{Sob H_0}{\sim} \chi_{n-1}^2 \quad (\sigma_0^2 = 0,5)$$

Região de rejeição do teste:

$$R_{0,05} =]23,7 ; +\infty[$$

Como $x_{obs}^2 = 15,4$ não pertence a $R_{0,05}$, não se rejeita H_0 ao nível de significância 5%.

- (b) A dedução do IC encontra-se na sebenta.
 $IC_{95\%}(\mu) =]99,59 ; 100,41[$
(c) $s^2 = 0,2$.

2. (a) i. O estimador dos momentos é dado pela solução da equação $E(X) = \bar{X}$, isto é, $\hat{\theta} = \bar{X} + 1$. O estimador de máxima verosimilhança coincide com o estimador dos momentos.
A estimativa de θ é $\hat{\theta} = 3,9$.

- ii. $SE_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\theta(\theta-1)}{n}}$. Logo a estimativa do erro padrão é $\hat{SE}_{\hat{\theta}} = 0,056$.
 $V(\hat{\theta}) = \frac{\theta(\theta-1)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Logo $\hat{\theta}$ é um estimador consistente.

- (b) Pretende-se testar: H_0 : A amostra é aleatória vs H_1 : A amostra não é aleatória.
Estatística de teste:

$$Z = \frac{V - (2n-1)/3}{\sqrt{(16n-29)/90}} \underset{Sob H_0}{\sim} N(0;1).$$

Temos $v_{obs} = 18$ e $z_{obs} = -0,45$.

$\text{valor} - p = 2 \min\{P(Z < -0,45|H_0), P(Z > -0,45|H_0)\} = 0,6528 > \alpha = 0,1$.

Logo não se rejeita H_0 ao nível de significância 10%.

3. (a) Se X é uma v.a. contínua com distribuição F , o Teorema da Transformação Uniformizante assegura-nos que $F(X) \sim U(0,1)$. Logo, para obter uma observação de X , basta calcular $F^{-1}(u)$ onde u é um número do intervalo $]0,1[$.

- (b) Neste caso, com $x \in \mathbb{R}^+$ e $u \in]0,1[$,

$$F(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = u \Rightarrow F^{-1}(u) = \sqrt{\frac{u}{1-u}}$$

Deste modo,

$$F^{-1}(0,2513) = 0,579352 \quad \text{e} \quad F^{-1}(0,8437) = 2,32335$$

(4.5) 4.

- (a) $\hat{\beta}_0 = -1689,5556$, $\hat{\beta}_1 = 4,3333$, $R^2 = 0,9477$ (ajuste razoável).

- (b) $H_0 : \beta_1 \leq 0$ vs $H_1 : \beta_1 > 0$

Estatística de teste:

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \underset{\text{Sob } H_0}{\sim} t_{n-2}$$

Região de rejeição do teste: $R_{0.01} =]t_{7,0.01}; +\infty[=]3.0; +\infty[$ Como $t_{obs} = 11.25824 \in R_{0.01}$, rejeita-se H_0 ao nível de significância 1%.

- (c) Com a transformação $u_i = x_i - \bar{x}$ tem-se $\bar{u} = 0$ vindo

$$S_{uu} = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_{xx},$$

$$S_{uY} = \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) = S_{xY}.$$

Assim, não haverá alteração na estimativa de β_1 e no coeficiente de determinação, R^2 , com esta transformação. A estimativa do parâmetro β_0 será $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{u} = \bar{Y}$.