FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística D
2^o Teste - 16 de Dezembro de 2011
Duração: 2 horas

Resolução abreviada do 2^o Teste - Versão A

(3.6) 1.

V A população $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, com σ^2 desconhecido e $n = 25$, logo $T_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/S \sim t_{24}$ é estatística pivot para estimar μ.

V As hipóteses a testar são $H_0 : \mu \geq 1.95$ vs $H_1 : \mu < 1.95$.

V Para $\alpha = 5\%$, $P\left(T_{25} < -t_{24:0.05}\right) = 0.05$ e $t_{24:0.05} = 1.71$, assim $R_{0.05} =]-\infty, -1.71[$.

F $t_{obs} = \sqrt{25}\left(\overline{x} - 1.95\right)/s = -2.071428571$ e
$p - value = P\left(T_{25} < t_{obs} \,|\mu = 1.95\right) = P\left(T_{25} > 2.0714 \,|\mu = 1.95\right) \approx 1 - P\left(T_{25} \leq 2.06 \,|\mu = 1.95\right) =$
$= 1 - .975 = 0.025$

F $t_{obs} = \sqrt{25}\left(\overline{x} - 1.95\right)/s = 5\left(1.921 - 1.95\right)/0.07$

F As hipóteses a testar são $H_0 : \mu \geq 1.95$ vs $H_1 : \mu < 1.95$.

(2.4) 2. Pelo T.L.C., $Z_{45} = \sqrt{45}\left(\overline{X} - 5.6\right)/\sqrt{2} \overset{a}{\sim} N\left(0.1\right)$.

V $P\left(\overline{X} > 5.6\right) = 1 - P\left(Z_{45} \leq \sqrt{45}\dfrac{5.6 - 5.6}{\sqrt{2}}\right) \approx 1 - P\left(Z \leq 0\right) = 1 - 0.5 = 0.5.$

F $P\left(\overline{X} > 5.6\right) \approx 0.5.$

F É possível determinar de modo aproximado, porque estamos em condições de utilizar o T.L.C..

V É possível determinar de modo aproximado, porque estamos em condições de utilizar o T.L.C..

(3.0) 3. $X \sim E\left(\lambda, 1\right)$. $E\left(X\right) = \lambda + 1$ e $V\left(X\right) = 1^2 = 1$.

V $V\left(\overline{X}\right) = V\left(X\right)/n = 1/n.$

V $E\left(\overline{X} - 1\right) = E\left(\overline{X}\right) - 1 = E\left(X\right) - 1 = \lambda$. É estimador não enviesado.

F $E\left(\overline{X}\right) = E\left(\overline{X}\right) = E\left(X\right) = \lambda + 1$. É estimador enviesado.

F $V\left(\overline{X}\right) = V\left(X\right)/n = 1/n.$

V $E\left(X\right) = \overline{X} \Leftrightarrow \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \overline{X} - 1$. $\lambda^* = \overline{X} - 1$ é o estimador dos momentos de λ.

(3.0) 4.

F Não porque não se sabe se a população tem distribuição Normal.

V Sim porque, apesar de não se saber se a população tem distribuição Normal, conhece-se a sua variância, e a amostra tem dimensão ≥ 30.

F Não porque sendo conhecida a variância da população, podemos obter um intervalo mais preciso usando esse valor e a distribuição Normal como distribuição aproximada para $\overline{X}$.

V Para a mesma amostra e a mesma população, quanto maior o nível de confiança maior é o intervalo de confiança.

V Estatística pivot: $V_{100} = \sqrt{100}\dfrac{\overline{X} - \mu}{2} \overset{a}{\sim} N\left(0, 1\right)$
$P\left(-a \leq V_{100} \leq a\right) \approx 0.95 \Leftrightarrow P\left(V_{100} \leq a\right) \approx 0.975 \Leftrightarrow a \approx 1.96$
$-1.96 \leq V_{100} \leq 1.96 \Leftrightarrow \overline{X} - 1.96\dfrac{2}{10} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\dfrac{2}{10}$ $\quad IC_{95\%}\left(\mu\right) \equiv \left[\overline{X} - 1.96\dfrac{2}{10}, \overline{X} + 1.96\dfrac{2}{10}\right]$
Intervalo de 95% de confiança observado para μ
$IC_{95\%}\left(\mu\right) \equiv \left[12.76 - 1.96\dfrac{2}{10}, 12.76 + 1.96\dfrac{2}{10}\right]$

(4.0) 5.

(a) $E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E\left(\frac{1}{2n}\theta T_n\right)=\frac{\theta}{2n}E\left(T_n\right)=\frac{\theta}{2n}2n=\theta$

(b) $EQM\left(\hat{\theta}\right)=V\left(\hat{\theta}\right)=V\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=V\left(\frac{\theta}{2n}T_n\right)=\frac{\theta^2}{4n^2}V\left(T_n\right)=\frac{\theta^2}{4n^2}4n=\frac{\theta^2}{n}$

(c) T_n é estatística pivot para estimar θ porque é uma função apenas da amostra e do parâmetro θ e o conhecimento da sua distribuição não exige o conhecimento prévio do valor de θ.

(d)
- $P\left(a\leq T_n\leq b\right)=1-\alpha$.
  $P\left(T_n\leq a\right)=\alpha/2\Leftrightarrow a=\chi^2_{2n:1-\alpha/2}\quad P\left(T_n\geq b\right)=\alpha/2\Leftrightarrow b=\chi^2_{2n:\alpha/2}$.
- $\chi^2_{2n:1-\alpha/2}\leq T_n\leq\chi^2_{2n:\alpha/2}\Leftrightarrow\chi^2_{2n:1-\alpha/2}\leq\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\leq\chi^2_{2n:\alpha/2}\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi^2_{2n:\alpha/2}}\leq\theta\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi^2_{2n:1-\alpha/2}}$

  $IC_{100(1-\alpha)\%}\left(\theta\right)\equiv\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi^2_{2n:\alpha/2}},\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\chi^2_{2n:1-\alpha/2}}\right]$

(4.0) 6.

(a) $H_0:p_i=P\left(X=A_i\right)=1/3,\ \ i=1,2,3\quad vs\quad H_1:\exists\, i\in\{1,2,3\}:\ p_i=P\left(X=A_i\right)\neq 1/3$

(b)

X	A_1	A_2	A_3
O_i	195	225	180
E_i	200	200	200

(c)
- Hipóteses: $H_0:p_i=P\left(X=A_i\right)=1/3,i=1,2,3\quad vs\quad H_1:\exists i\in\{1,2,3\}:p_i=P\left(X=A_i\right)\neq 1/3$
- Estatística de teste: $X^2=\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(O_i-E_i\right)^2}{E_i}\overset{a}{\sim}\chi^2_{3-1}$, se H_0 é verdadeira.
- Região de rejeição para $\alpha=10\%$: $R_{0.1}\equiv]a,+\infty[$, com $P\left(\chi^2_2>a\right)=0.1$. Como $a=\chi^2_{2:0.1}=4.61$, $R_{0.1}=]4.61,+\infty[$
- Decisão: $x^2_{obs}=5.25$ e devido a $x^2_{obs}=5.25\notin R_{0.1}$, não existe evidência estatística para afirmar que os compradores têm diferentes preferências pelo tamanho do pacote que vão adquirir.

(d) $p-value=P\left(X^2>x^2_{obs}\,|H_0\text{ é verdadeira}\right)=P\left(\chi^2_2>5.25\right)=1-P\left(\chi^2_2\leq 5.25\right)=1-0.9276=0.0724$