PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA D
1º Teste - 29 de Outubro de 2011
Duração: 2 horas

Resolução abreviada do 1º Teste - Versão A

(4.0) 1. Representе-se por T-cliente comprar lata de tinta e por P-cliente comprar um pincel. Sabe-se que: $P(T\cap P)=0.084$, $P(T|P)=0.28$ e que $P\left(T\,|\bar{P}\right)=0.82$

V $P(T|P)=\dfrac{P(T\cap P)}{P(P)} \Leftrightarrow 0.28=\dfrac{0.084}{P(P)} \Leftrightarrow P(P)=0.3$

F $P\left(\bar{T}\,|\bar{P}\right)=1-P\left(T\,|\bar{P}\right)=0.18$

V $P(T)=P(T\cap P)+P\left(T\cap\overline{P}\right)=0.084+P\left(T\,|\overline{P}\right)P\left(\overline{P}\right)=0.658$

F $P(P|T)=\dfrac{P(P\cap T)}{P(T)}=0.1276595745$

(4.0) 2. $X\sim N\left(60,15^2\right)$.

V $P(X<45)=P\left(\dfrac{X-60}{15}\le\dfrac{45-60}{15}\right)=P(Z\le -1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587.$

F $P(X>a)=0.1587\Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-60}{15}\le\dfrac{a-60}{15}\right)=0.8413\Leftrightarrow P\left(Z\le\dfrac{a-60}{15}\right)=0.8413\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\dfrac{a-60}{15}=1\Leftrightarrow a=75.$

V Sejam $X_1,\ldots,X_9$ os pesos de 9 batatas. Seja $T=X_1+\ldots+X_9$ o peso de um saco. Admitindo que $X_1,\ldots,X_9$ são v.a.'s independentes e que todas têm distribuição $N\left(60,15^2\right)$, então T tem distribuição normal,

$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{9}X_i\right)=\sum_{i=1}^{9}E(X_i)=\sum_{i=1}^{9}60=9\times 60=540$ e

$V(T)=V\left(\sum_{i=1}^{9}X_i\right)=\sum_{i=1}^{9}V(X_i)=\sum_{i=1}^{9}15^2=9\times 15^2=2025.$ Então $T\sim N(540,2025)$.

$P(540\le T\le 600)=P\left(\dfrac{540-540}{\sqrt{2025}}\le\dfrac{T-540}{\sqrt{2025}}\le\dfrac{600-540}{\sqrt{2025}}\right)=P(0\le Z\le 1.33)=$
$=P(Z\le 1.33)-P(Z\le 0)=0.9082-0.5=0.4082.$

F $P(\text{Média})=1-P(\text{Pequena})-P(\text{Grande})=1-2\times 0.1587=0.6826.$

(4.0) 3.

V $X\sim H(10000,500,20)$.

V $X\sim B\left(20,\dfrac{500}{10000}\right)\equiv B(20,0.05).$
$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{20}{0}0.05^0(1-0.05)^{20-0}=0.6415140776$

F Como $X\sim B(20,0.05)$, $V(X)=20\times 0.05\times 0.95=0.95$ e $\sigma(X)=\sqrt{0.95}=0.9746794345$

V $X\sim B\left(40,\dfrac{500}{10000}\right)\equiv B(40,0.05)$. $X\overset{a}{\sim}P(40\times 0.05)\equiv P(2)$, porque $n=40\ge 30$ e $np=40\times 0.05=2<5$.

$P(X\le 1)=\sum_{k=0}^{1}P(X=k)\approx\sum_{k=0}^{1}e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}=e^{-2}(1+2)=3\,e^{-2}$

(5.0) 4.

(a) Função de probabilidade do par aleatório (X,Y).

$X\setminus Y$	-1	1	
0	$p-0.1$	$0.6-p$	0.5
1	$0.5-p$	p	0.5
	0.4	0.6	1

(b)

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le P(X=0;Y=-1) \le \min\left(P(X=0), P(Y=-1)\right) \\ 0 \le P(X=0;Y=1) \le \min\left(P(X=0), P(Y=1)\right) \\ 0 \le P(X=1;Y=-1) \le \min\left(P(X=1), P(Y=-1)\right) \\ 0 \le P(X=1;Y=1) \le \min\left(P(X=1), P(Y=1)\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le p-0.1 \le 0.4 \\ 0 \le 0.6-p \le 0.5 \\ 0 \le 0.5-p \le 0.4 \\ 0 \le p \le 0.5 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0.1 \le p \le 0.5$$

(c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{1} xP(X=x) = 0.5 \\ E\left(X^2\right) &= \sum_{x=0}^{1} x^2P(X=x) = 0.5 \\ E(Y) &= \sum_{y\in\{-1,1\}} yP(Y=y) = -0.4+0.6 = 0.2 \\ E\left(Y^2\right) &= \sum_{y\in\{-1,1\}} y^2P(Y=y) = 0.4+0.6 = 1 \\ E(XY) &= \sum_{x=0}^{1}\sum_{y\in\{-1,1\}} xyP(X=x,Y=y) = -(0.5-p)+p = 2p-0.5 \\ cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y) = 2p-0.5-0.5\times 0.2 = 2p-0.6 \end{aligned}$$

$cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow 2p-0.6=0 \Leftrightarrow p=0.3$

(d) Para $p=0.3$, $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y), \quad \forall (x,y),\ x\in\{0,1\},\ y\in\{-1,1\}$ logo X e Y são v.a.'s independentes.

(e) $P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=p \Leftrightarrow P(X+Y=2)=0.2 \Leftrightarrow p=0.2$

(3.0) 5.

(a) A função $f_T(\cdot)$ tem a estrutura da função densidade associada a uma distribuição Exponencial com parâmetro de localização $\lambda=0$ e parâmetro de dispersão $\delta=25$.

(b) A distribuição exponencial com parâmetros $(0,\delta)$ goza da propriedade de falta de memória, ou seja, se $T\sim E(0,\delta)$, então $P(T>t+s\,|T>s)=P(T>t), \quad \forall\, s,t\in\mathbb{R}^+$. Assim se explica a validade da igualdade $P(T>45\,|T>25)=P(T>20+25\,|T>25)=P(T>20)$.

(c) Se $N(t)$ representar o n.º de clientes que chegam durante t minutos, $N(t)$ é um Processo de Poisson com taxa $\beta=1/25$ por minuto. Assim, $N(60)\sim P(\beta\times 60)\equiv P(60/25)\equiv P(2.4)$.