FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística D - A

2º Teste - 16 de Dezembro de 2011

Duração: 2 horas

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ N.º caderno: ______________

(3.6) 1. Assinale com uma cruz sobre **V** para verdadeiro ou sobre **F** para falso, o valor lógico de cada uma das seguintes respostas. Cada resposta correcta vale 0.6 valores, cada resposta incorrecta desconta 0.1 valores e cada não resposta nada desconta.

A altura dos jogadores de basquete da liga profissional é uma *v.a.*, X, que se admite ter distribuição Normal, com valor esperado μ metros e desvio padrão σ metros. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da *v.a.* X, com $n = 25$, $\overline{x}_{25} = 1.921$ metros e variância amostral $s^2_{25} = 0.0049$ metros^2. O seleccionador nacional quer testar a hipótese de a altura média ser inferior a 1.95 metros, o que ele considera pouco recomendável para as competições internacionais.

- V F $T_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/S \sim t_{24}$ é uma estatística pivot para realizar o teste de hipóteses sobre μ.
- V F A especificação da hipótese, de modo a responder à questão do treinador obriga a que $H_0 : \mu \geq 1.95$.
- V F A região de rejeição associada ao teste de hipóteses: $H_0 : \mu \geq 1.95$ *vs* $H_1 : \mu < 1.95$, para um nível de significância de 5% é $R_{0.05} =]-\infty, -1.711[$.
- V F O *p-value* para o teste de hipóteses: $H_0 : \mu \geq 1.95$ *vs* $H_1 : \mu < 1.95$ é 0.
- V F O valor observado da estatística de teste é de: $t_{obs} = 5(1.921 - 1.95)/0.0049$.
- V F A especificação da hipótese, de modo a responder à questão do treinador é: $H_0 : \mu = 1.95$ *vs* $H_1 : \mu \neq 1.95$.

(2.4) 2. Assinale com uma cruz sobre **V** para verdadeiro ou sobre **F** para falso, o valor lógico de cada uma das seguintes respostas. Cada resposta correcta vale 0.6 valores, cada resposta incorrecta desconta 0.1 valores e cada não resposta nada desconta.

Seja $X_1, ..., X_{45}$ uma amostra aleatória da *v.a.* X com $E(X) = 5.6$ e $V(X) = 2$. Relativamente à probabilidade de $\overline{X} = \sum_{i=1}^{45} X_i/45$ exceder 5.6, temos:

- V F $P(\overline{X} > 5.6) \approx .5$.
- V F $P(\overline{X} > 5.6) \approx 1 - 5.6/45$.
- V F Não é possível de determinar, nem sequer aproximadamente.
- V F Podemos usar o Teorema Limite Central para aproximar o valor da probabilidade.

(3.0) 3. Assinale com uma cruz sobre **V** para verdadeiro ou sobre **F** para falso, o valor lógico de cada uma das seguintes respostas. Cada resposta correcta vale 0.6 valores, cada resposta incorrecta desconta 0.1 valores e cada não resposta nada desconta.

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da distribuição exponencial; $E(\lambda, 1)$. Considere a média amostral $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- V F $V(\overline{X}_n) = 1/n$.
- V F $(\overline{X}_n - 1)$ é um estimador não enviesado de λ.
- V F $\overline{X}_n$ é um estimador centrado de λ.
- V F $V(\overline{X}_n) = (\lambda + 1)/n$.
- V F O estimador de λ pelo método dos momentos é: $\lambda^* = \overline{X}_n - 1$.

(3.0) 4. Assinale com uma cruz sobre **V** para verdadeiro ou sobre **F** para falso, o valor lógico de cada uma das seguintes respostas. Cada resposta correcta vale 0.6 valores, cada resposta incorrecta desconta 0.1 valores e cada não resposta nada desconta.

O tempo necessário para que uma reacção química se complete é uma *v.a.*, X, com valor esperado μ minutos e desvio padrão $\sigma = 2$ minutos. Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória da *v.a.* X, com $n = 100$, $\overline{x}_{100} = 12.76$ minutos e variância amostral $s^2_{100} = 3.96$ minutos^2.

- V F $H_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sqrt{S^2} \sim t_{100}$ é uma estatística pivot para estimar μ.
- V F $V_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/2 \overset{a}{\sim} N(0, 1)$ é uma estatística pivot para estimar μ.
- V F $IC_{99\%}(\mu) = [12.76 - 2.626 \times \sqrt{3.96}/10, 12.76 + 2.626 \times \sqrt{3.96}/10]$ é um intervalo de 99% confiança para μ.
- V F Para a mesma amostra observada e para os mesmo pressupostos poulacionais: $IC_{90\%}(\mu) \subset IC_{95\%}(\mu)$.
- V F $IC_{95\%}(\mu) = [12.76 - 1.96 \times 2/10, 12.76 + 1.96 \times 2/10]$ é um intervalo de 95% de confiança para μ.

(4.0) 5. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população X, cuja distribuição depende de um parâmetro $\theta \in \mathbb{R}^+$ com valor desconhecido. Considere a estatística

$$T_n = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Sabendo que:

- T_n tem distribuição do qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade;
- $E(T_n) = 2n$;
- $V(T_n) = 4n$,

justifique cuidadosamente as seguintes afirmações:

(a) $\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é um estimador centrado de θ.

(b) $EQM\left(\hat{\theta}\right) = \theta^2/n$.

(c) T_n é uma estatística pivot para estimar θ.

(d) Utilizando a estatística pivot T_n,

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\theta) \equiv \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi^2_{2n:\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi^2_{2n:1-\alpha/2}} \right]$$

é um intervalo de confiança $(1-\alpha)$ para θ.

(4.0) 6. Um detergente para máquinas de lavar louça é vendido em pacotes com 3 tamanhos: Pequeno (A_1), Médio (A_2) e Grande (A_3). Pretende-se saber se os consumidores manifestam a mesma preferência por qualquer tamanho dos pacotes, isto é, se a v.a. X-tamanho do pacote escolhido por um cliente, tem função de probabilidade:

$$X \begin{cases} A_1 & A_2 & A_3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{cases}$$

Para tal, numa sondagem a 600 compradores deste detergente, foi reunida a seguinte informação acerca do tamanho do pacote que compraram:

X	A_1	A_2	A_3
O_i	195	225	180

(a) Apresente as hipóteses que matematicamente expressam o problema: os consumidores manifestam a mesma preferência por qualquer tamanho dos pacotes ou não?

(b) Complete a seguinte tabela resumo de informação para a realização do teste de ajustamento do qui-quadrado:

X	A_1	A_2	A_3
O_i	195	225	180
E_i			

(c) Para um nível de 10% de significância, apresente os diversos itens da metodogia para a realização do teste.

(d) Determine o $p - value$ associado ao valor observado da estatística deste teste, usando a seguinte informação: $P\left(\chi^2_2 \leq 5.25\right) = 0.9276$

Distribuições discretas

Distribuição	Função probabilidade	Suporte	Valor médio	Variância
$H(N,M,n)$	$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}/\binom{N}{n}$	$\max(0, M+n-N) \le k \le \min(M,n)$	nM/N	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$0 \le k \le n$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	$k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ

Distribuições contínuas

Distribuição	Função densidade	Suporte	Valor médio	Variância
$U[a,b]$	$\dfrac{1}{b-a}$	$a \le x \le b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$E(\lambda,\delta)$	$\dfrac{1}{\delta}e^{-(x-\lambda)/\delta}$	$x \ge \lambda$	$\lambda+\delta$	δ^2
$N(\mu,\sigma^2)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2

Distribuições de estatísticas

Média

$\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$	$\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{S} \sim t_{n-1}$	$\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{S} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Variância amostral	Proporção amostral	Teste de ajustamento
$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\sqrt{n}\dfrac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$X^2 = \sum_{i=1}^{m}\dfrac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim} \chi^2_{m-p-1}$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - n\bar{X}^2\right)$$