FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
27 de abril de 2016
1º teste – Solução

Versão A

1.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E
(c) **A** B C D E

2.
(a) A **B** C D E
(b) A B **C** D E

3.
(a) A B **C** D E
(b) **A** B C D E

4.
(a) A B **C** D E
(b) A B C D **E**
(c) A **B** C D E

5.
(a) A B C **D** E
(b) A B C **D** E

Versão B

1.
(a) A B C **D** E
(b) A **B** C D E
(c) A B C **D** E

2.
(a) A B C **D** E
(b) **A** B C D E

3.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E

4.
(a) A **B** C D E
(b) A B C D **E**
(c) A **B** C D E

5.
(a) A **B** C D E
(b) A B **C** D E

6. Considere-se a v.a. contínua

$T =$ tempo, em dias, até à primeira avaria/paragem $\equiv$ tempo entre avarias/paragens consecutivas $\sim Exp(3, 9)$.

(a) Sendo $X \sim Exp(\lambda, \delta)$ tem-se que $E(X) = \lambda + \delta$ e $V(X) = \delta^2$ (ver formulário). Desta forma vem então

$$E(T) = 3 + 9 = 12 \quad \text{e} \quad \sigma(T) = \sqrt{V(T)} = \sqrt{9^2} = 9$$

i.e., o tempo esperado entre avarias consecutivas é de 12 dias e o desvio padrão é de 9 dias.

(b) Considere a v.a. $T_i = i$-ésimo tempo de funcionamento da máquina M1, entre paragens para reparação $(i = 1, \ldots, 100)$. Então, $T_i \underset{i.i.d.}{\sim} T \sim Exp(3, 9)$. Estamos interessados na distribuição de $W = \sum_{i=1}^{100} T_i$. Como $n = 100 \geq 30$ e nos é pedida a **probabilidade aproximada** de $1200 \leq W \leq 1250$, vamos usar o T.L.C. que nos diz que

$$Z = \frac{W - E(W)}{\sqrt{V(W)}} \underset{a}{\sim} N(0, 1).$$

Neste caso, dado que

$$E(W) = E(\sum_{i=1}^{100} T_i) = \sum_{i=1}^{100} E(T_i) \underset{T_i \sim T}{=} \sum_{i=1}^{100} E(T) = 100 * E(T) = 100 * 12 = 1200$$

e que

$$V(W) = V(\sum_{i=1}^{100} T_i) \underset{T_i indeps.}{=} \sum_{i=1}^{100} V(T_i) \underset{T_i \sim T}{=} \sum_{i=1}^{100} V(T) = 100 * V(T) = 100 * 81 = 8100$$

vem então

$$P(1200 \leq W \leq 1250) = P\Big(\frac{1200 - E(W)}{\sqrt{V(W)}} \leq \frac{W - E(W)}{\sqrt{V(W)}} \leq \frac{1250 - E(W)}{\sqrt{V(W)}}\Big) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{9}\right) \approx$$

$$\underset{a}{\approx} \Phi\left(\frac{5}{9}\right) - \Phi(0) \simeq \Phi(0.56) - \Phi(0) \underset{tabela}{\simeq} 0.7123 - 0.5000 = 0.2123.$$

7. A mota do João, nas deslocações, tem um consumo de combustível, em litros, com uma distribuição definida pela seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ mx, & 1 < x \leq 4, \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

(a) Verifique que $m = 1/15$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^1 xdx + \int_1^4 mxdx = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} + m\frac{15}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

(b) Determine o valor esperado do consumo de combustível da mota.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^4 \frac{1}{15}x^2dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{15}(4^3 - 1) = \frac{26}{15}. \end{aligned}$$

(c) Sabendo que $E(X^2) = 9/2$, determine $E(X(X-1))$ e $V(X)$.

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = \frac{9}{2} - \frac{26}{15} = \frac{83}{30}.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{9}{2} - \left(\frac{26}{15}\right)^2 = \frac{673}{450}.$$

(d) Determine a função de distribuição do consumo de combustível da mota.
Se $x < 0$,

$$F(x) = 0.$$

Se $x \in [0, 1[$,

$$F(x) = \int_0^x udu = \frac{x^2}{2}.$$

Se $x \in [1, 4[$,

$$F(x) = \int_0^1 udu + \int_1^x \frac{1}{15}udu = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}(x^2 - 1).$$

Logo, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{30}(14 + x^2), & 1 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$

(e) Determine a probabilidade de, numa qualquer deslocação, o consumo ser superior a 1 litro.

$$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
18 de maio de 2016
2º teste – Solução

Versão A

	1.	2.	3.	4.
(a)	**A** B C D E	**A** B C D E	A B C **D** E	**V** F
(b)	A B **C** D E	A B **C** D E		V **F**
(c)	A **B** C D E	A B C **D** E		V **F**
(d)				**V** F
(e)				V **F**
(f)				V **F**

Versão B

	1.	2.	3.	4.
(a)	A **B** C D E	**A** B C D E	**A** B C D E	**V** F
(b)	A B C **D** E	A B **C** D E		V **F**
(c)	A **B** C D E	**A** B C D E		**V** F
(d)				V **F**
(e)				**V** F
(f)				**V** F

5. (a) As estimativas pontuais de μ e σ são, respectivamente, $\bar{x} = 782$ e $s =$3,338.

   (b) Pretende-se testar H_0: $\mu \leq 780$ vs. H_1: $\mu > 780$ e vamos usar o nível de significância $\alpha = 0{,}1$.
   Como a população tem distribuição normal e a variância populacional, σ^2, é desconhecida, a estatística de teste é
   $$T = \frac{\bar{X} - 780}{S/\sqrt{n}} \sim t_7.$$
   A região crítica é $]t_{7;0{,}1}, \infty[=]1{,}41; \infty[$
   O valor observado da estatística de teste, calculado com base na amostra é t_{obs}=1,694. Este valor pertence à região crítica.

   (c) $valor - p = P(T > 1{,}694 | T \sim t_7) \approx P(T > 1{,}89 | T \sim t_7) = 0{,}05$.
   Se quisermos ser mais precisos, podemos garantir que
   $$P(T > 1{,}89 | T \sim t_7) < valor - p < P(T > 1{,}41 | T \sim t_7)$$
   ou seja $0{,}05 < valor - p < 0{,}1$.

6. (a) O estimador dos momentos é $\hat{\delta} = \frac{2}{3}\bar{X}$. O seu erro quadrático médio é $EQM(\hat{\delta}) = \frac{\delta^2}{3n}$.

   (b) $\hat{\delta} = \frac{2}{3} \times 1{,}8 = 1{,}2$.

   (c) Como vamos usar uma amostra de dimensão 100 (≥ 30), então
   $$P\left(-1{,}96 \leq \frac{\bar{X} - \frac{3\delta}{2}}{\frac{\sqrt{3}\delta}{2\sqrt{n}}} \leq 1{,}96\right) \approx 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(-1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}}{\delta} - \frac{3}{2} \leq 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95 \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow P\left(\frac{\bar{X}}{\frac{3}{2} + 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}} \leq \delta \leq \frac{\bar{X}}{\frac{3}{2} - 1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}}\right) \approx 0{,}95$$
   Logo, o intervalo de confiança aleatório a 95% é $IC_{95\%}(\delta) = \left[\frac{\bar{X}}{\frac{3}{2}+1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}}; \frac{\bar{X}}{\frac{3}{2}-1{,}96\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}}}\right]$.
   Para a amostra observada, obtemos o intervalo $IC_{95\%}(\delta) = [1{,}078\,;\,1{,}353]$.

Versão A

1.

(a)	A	**B**	C	D	E	
(b)	A	B	C	**D**	E	F
(c)	A	**B**	C	D	E	
(d)	A	B	**C**	D	E	
(e)	A	B	C	**D**	E	
(f)	A	B	C	D	**E**	

2.

(a)	**A**	B	C	D	E
(b)	A	**B**	C	D	E
(c)	A	B	**C**	D	E

Versão B

1.

(a)	A	**B**	C	D	E	
(b)	A	B	C	D	**E**	F
(c)	**A**	B	C	D	E	
(d)	**A**	B	C	D	E	
(e)	A	B	C	**D**	E	
(f)	A	B	C	D	**E**	

2.

(a)	A	B	**C**	D	E
(b)	**A**	B	C	D	E
(c)	**A**	B	C	D	E

3. Considere-se a v.a. contínua $X =$ nº de artigos produzidos numa hora, sendo $n = 30$ o número de horas em que se registou o número de peças produzidas.

a) Pretende-se testar ao nível $\alpha = 5\%$ as hipóteses:

$$H_0 : X \sim N(50;\ 12{,}25) \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : X \nsim N(50;\ 12{,}25).$$

Estando portanto a distribuição da hipótese nula completamente especificada temos imediatamente que o número de parâmetros a estimar é p$=0$.

Começamos por considerar as classes dadas no enunciado e construímos a seguinte tabela:

Classe	O_i	p_i (sob H_0)	$E_i=n\times p_i$ (sob H_0)
$]-\infty,47]$	6	0,1949	5,847
$]47,49]$	3	0,1910	5,73
$]49,51]$	10	0,2282	6,846
$]51,53]$	5	0,1910	5,73
$]53,+\infty[$	6	0,1949	5,847

Como neste caso se observa $E_i \geq 5\ \forall i$ temos então k$=5$ classes.

O teste de ajustamento do Chi-quadrado considera a estatística de teste

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{sob\, H_0}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$$

que neste caso virá

$$X^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_4$$

sendo a região crítica para o teste de H_0 ao nível 5% dada por RC$=]\chi^2_{4;0.05}, +\infty[\equiv]9{,}49, +\infty[$. Ora, $x^2_{obs} \simeq 2.855 \notin$ RC pelo que não rejeitamos H_0 ao nível 5%. Assim, devemos informar o gestor que não existe evidência para rejeitar a hipótese do output da linha de produção seguir uma distribuição N(50; 12,25).

b) p-value $= P(X^2 > x^2_{obs} | X^2 \sim \chi^2_4) = P(X^2 > 2{,}855 | X^2 \sim \chi^2_4) \in [0{,}5\,;\,0{,}7]$ (observando a tabela do Qui-quadrado disponibilizada, para os 4 graus de liberdade).

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
29 de junho de 2016
exame – Solução

Versão A

1.
(a) A **B** C D E F
(b) A B C **D** E
(c) **A** B C D E F

2.
(a) **A** B C D E
(b) A B **C** D E

3.
(a) A **B** C D E
(b) A B C **D** E
(c) A B **C** D E

4.
(a) V **F**
(b) A B **C** D E
(c) A B C **D** E

Versão B

1.
(a) **A** B C D E
(b) A B C **D** E
(c) A **B** C D E

2.
(a) A B C **D** E
(b) A B C **D** E

3.
(a) A **B** C D E F
(b) A **B** C D E
(c) A B C D **E** F

4.
(a) **V** F
(b) A **B** C D E
(c) **A** B C D E

5. Seja X_t a variável aleatória que indica o número de alunos que entraram numa sala da FCT durante um período de t minutos. $X_t \sim P(0{,}3t)$.
   (a) $P(X_{30} \geq 30) = 0{,}9938$
   (b) $P(30 < X_{120} < 34) = P(31 \leq X_{120} \leq 33) = 0{,}1664$
   (c) $P(X_{120} < 34) = P(X_{120} \leq 33) = 0{,}3085$ (aproximando a distribuição de Poisson, pela distribuição normal).

6. (a) 3/20
   (b) O estimador é centrado e consistente.
   (c) Pretende-se testar, $H_0 : p \leq 0{,}1$ vs. $H_1 : p > 0{,}1$;
   $R_{0{,}05} = (1{,}64; +\infty)$; $z_{obs} = 1{,}05$;
   Decisão: não rejeitar H0 a 5%, pelo que os dados não indicam que a proporção seja superior a 0,1

7. (a) $\hat{Y} = 14.4010 + 0.1684x$;
   (b) $R^2 = 0.8991$;
   (c) $(1.9498; 4.6459)$