Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Engenharia Electrotécnica

Licenciatura em Engenharia Informática

Disciplina de Sistemas Lógicos – 1º teste – 20/5/2000 – 9h30mn

RESOLUÇÃO

Q1 – alínea a)

$(11010{,}0101)_2 = (1A{,}5)_{16} = (26{,}3125)_{10}$

$(11010{,}0101)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} =$

$= 16 + 8 + 2 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 26{,}3125$

Q1 – alínea b)

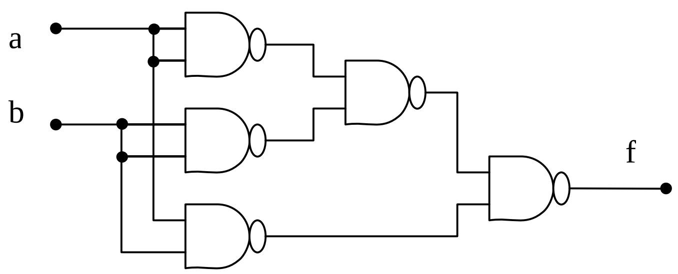
$f(a,b,c,d) = a\,\bar b\,\bar c + a\,\bar b\,\bar c\,d + a\,\bar b$

Dado que $x.y + y = (x+1).y = 1.y = y$ pode-se obter

$f(a,b,c,d) = a\,\bar b\,\bar c + a\,\bar b\,\bar c\,d + a\,\bar b = a\,\bar b\,\bar c(1+d) + a\,\bar b = a\,\bar b\,\bar c + a\,\bar b = a\,\bar b(\bar c + 1) = a\,\bar b$

Q1 – alínea c)

$f(a,b) = \bar a.\bar b + a\,b = \overline{\overline{\bar a\,\bar b + a\,b}} = \overline{\overline{\bar a\,\bar b}.\overline{a\,b}} = \overline{\overline{\overline{a.a}\,.\,\overline{b.b}}\,.\,\overline{a.b}}$



Q2 – alínea a)

#	*A*	*B*	*C*	*D*	*f*
[0]	0	0	0	0	0
[1]	0	0	0	1	0
[2]	0	0	1	0	0
[3]	0	0	1	1	0
[4]	0	1	0	0	0
[5]	0	1	0	1	0
[6]	0	1	1	0	0
[7]	0	1	1	1	1
[8]	1	0	0	0	0
[9]	1	0	0	1	0
[10]	1	0	1	0	0
[11]	1	0	1	1	1
[12]	1	1	0	0	1
[13]	1	1	0	1	1
[14]	1	1	1	0	1
[15]	1	1	1	1	1

Q2 – alínea b)

$$f(A,B,C,D) = \prod(0,2,4,8,10,14,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0		0
01				
11			0	
10	0		0	0

$$f(A,B,C,D) = (B+D).(A+C+D).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Q3 – alínea a)

Dada a função $f(A,B,C,D,E) = \sum(2,3,7,10,12,15,27) + d(5,18,19,21,23)$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
[2]	0	0	0	1	0
[3]	0	0	0	1	1
[5]	0	0	1	0	1
[10]	0	1	0	1	0
[12]	0	1	1	0	0
[18]	1	0	0	1	0
[7]	0	0	1	1	1
[19]	1	0	0	1	1
[21]	1	0	1	0	1
[15]	0	1	1	1	1
[23]	1	0	1	1	1
[27]	1	1	0	1	1

Tabela 1 – Agrupamento de mintermos segundo o seu número de 1s

		A	B	C	D	E
√	[2]	0	0	0	1	0
√	[3]	0	0	0	1	1
√	[5]	0	0	1	0	1
√	[10]	0	1	0	1	0
X	[12]	0	1	1	0	0
√	[18]	1	0	0	1	0
√	[7]	0	0	1	1	1
√	[19]	1	0	0	1	1
√	[21]	1	0	1	0	1
√	[15]	0	1	1	1	1
√	[23]	1	0	1	1	1
√	[27]	1	1	0	1	1

Tabela 2 – Tabela base de simplificação para o 1º passo

⇒

	A	B	C	D	E
[2,3]	0	0	0	1	-
[2,10]	0	-	0	1	0
[2,18]	-	0	0	1	0
[3,7]	0	0	-	1	1
[3,19]	-	0	0	1	1
[5,7]	0	0	1	-	1
[5,21]	-	0	1	0	1
[18,19]	1	0	0	1	-
[7,15]	0	-	1	1	1
[7,23]	-	0	1	1	1
[19,23]	1	0	-	1	1
[19,27]	1	-	0	1	1
[21,23]	1	0	1	-	1

Tabela 3 – Nova tabela de simplificações para o 1º passo

		A	B	C	D	E
√	[2,3]	0	0	0	1	-
X	[2,10]	0	-	0	1	0
√	[2,18]	-	0	0	1	0
√	[3,7]	0	0	-	1	1
√	[3,19]	-	0	0	1	1
√	[5,7]	0	0	1	-	1
√	[5,21]	-	0	1	0	1
√	[18,19]	1	0	0	1	-
X	[7,15]	0	-	1	1	1
√	[7,23]	-	0	1	1	1
√	[19,23]	1	0	-	1	1
X	[19,27]	1	-	0	1	1
√	[21,23]	1	0	1	-	1

Tabela 4 – Tabela base de simplificação para o 2º passo

⇒

	A	B	C	D	E
[2,3,18,19]	-	0	0	1	-
[2,18,3,19]	-	0	0	1	-
[3,7,19,23]	-	0	-	1	1
[3,19,7,23]	-	0	-	1	1
[5,7,21,23]	-	0	1	-	1
[5,21,7,23]	-	0	1	-	1

Tabela 5 – Nova tabela de simplificações para o 2º passo

		A	B	C	D	E
X	[2,3,18,19]	-	0	0	1	-
X	[3,7,19,23]	-	0	-	1	1
X	[5,7,21,23]	-	0	1	-	1

Tabela 6 – Tabela base de simplificação para o 3º passo

⇒ **(Não existe mais simplificação possível)**

	2	3	7	10	12	15	27
[12]					×		
[2,10]	×			×			
[7,15]			×			×	
[19,27]							×
[2,3,18,19]	×	×					
[3,7,19,23]		×	×				
[5,7,21,23]			×				

Tabela 7 – Tabela de coberturas de implicantes primos

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
	[2,3,18,19]	×	×					
	[3,7,19,23]		×	×				
	[5,7,21,23]			×				

Tabela 8 – Tabela de coberturas com implicantes primos essenciais

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
	[2,3,18,19]	×	×					
	[3,7,19,23]		×	×				

Tabela 9 – Tabela de cobertura com implicantes primos essenciais e refinada

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
→	**[2,3,18,19]**	⊗	⊗					

Tabela 10 – Tabela de cobertura da simplificação tomando [2,3,18,19].

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
→	**[3,7,19,23]**		⊗	⊗				

Tabela 11 – Tabela de cobertura da simplificação tomando [3,7,19,23].

Da Tabela 10 → $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}BC\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{B}\,\overline{C}D$

Da Tabela 11 → $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}BC\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{B}DE$

Q3 – alínea b)

Dada a função $f(A,B,C,D) = \prod(0,2,4,8,10,14,15)$

#	*A*	*B*	*C*	*D*	*f*
[0]	0	0	0	0	0
[1]	0	0	0	1	1
[2]	0	0	1	0	0
[3]	0	0	1	1	1
[4]	0	1	0	0	0
[5]	0	1	0	1	1
[6]	0	1	1	0	1
[7]	0	1	1	1	1
[8]	1	0	0	0	0
[9]	1	0	0	1	1
[10]	1	0	1	0	0
[11]	1	0	1	1	1
[12]	1	1	0	0	1
[13]	1	1	0	1	1
[14]	1	1	1	0	0
[15]	1	1	1	1	0

No caso desta questão, é imposta como restrição a utilização <u>somente</u> de multiplexers de duas entradas de controlo, i.e., quatro entradas de dados.

#	C	D	f_1
[0]	0	0	0
[1]	0	1	1
[2]	1	0	0
[3]	1	1	1

Tabela A – Tabela de verdade dado A=0 e B=0

#	C	D	f_2
[4]	0	0	0
[5]	0	1	1
[6]	1	0	1
[7]	1	1	1

Tabela B – Tabela de verdade dado A=0 e B=1

#	C	D	f_3
[8]	0	0	0
[9]	0	1	1
[10]	1	0	0
[11]	1	1	1

Tabela C – Tabela de verdade dado A=1 e B=0

#	C	D	f_4
[12]	0	0	1
[13]	0	1	1
[14]	1	0	0
[15]	1	1	0

Tabela D – Tabela de verdade dado A=1 e B=1

Assim, podemos implementar cada uma das funções f_1, f_2, f_3 e f_4 através de um multiplexer de duas entradas de controlo. Resultando então:

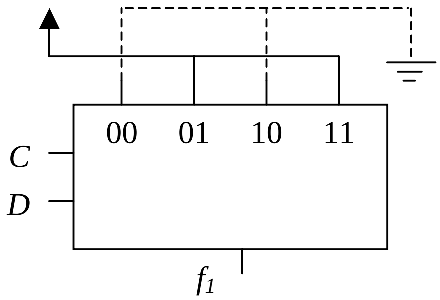


Figura A – Implementação da função f_1

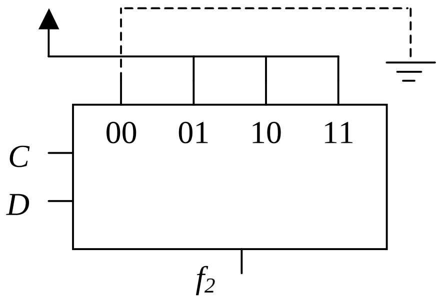


Figura B – Implementação da função f_2

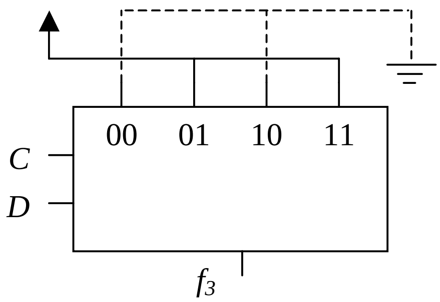


Figura C – Implementação da função f_3

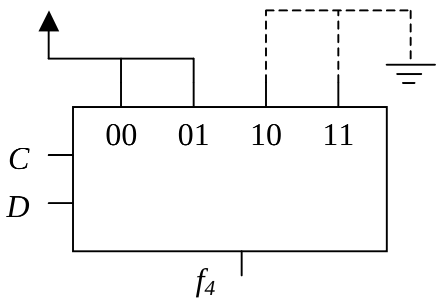


Figura D – Implementação da função f_4

Assim, recorrendo a mais um multiplexer de duas entradas de controlo que seleccione qual a função, f_1, f_2, f_3 ou f_4, que representa a função f dados A e B. Tal associação encontra-se descrita na tabela abaixo:

A	B		f
0	0	$\Rightarrow$	f_1
0	1	$\Rightarrow$	f_2
1	0	$\Rightarrow$	f_3
1	1	$\Rightarrow$	f_4

Tabela E – Associação entre a função f e as funções f_1, f_2, f_3 ou f_4

Desta forma, resulta então um diagrama final dado por:

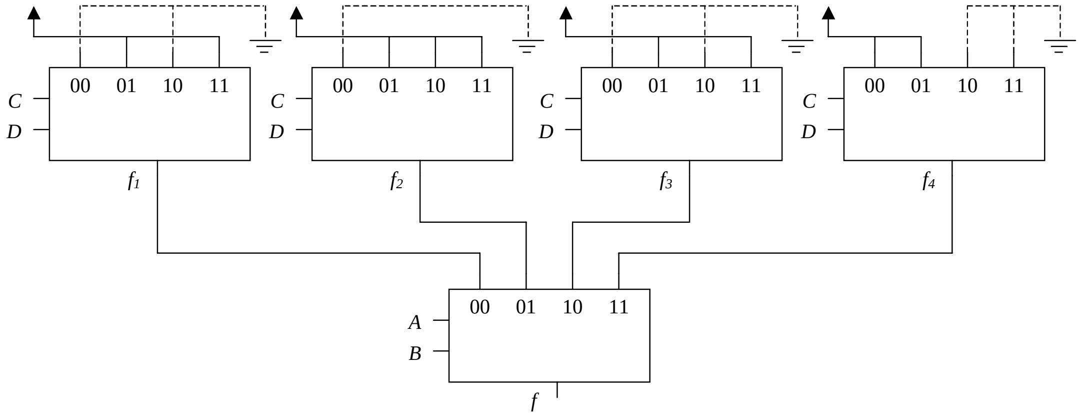


Figura E – Implementação da função *f* – 1ª versão

E notando que as funções f_1 e f_3 são iguais, pode proceder-se à simplificação:

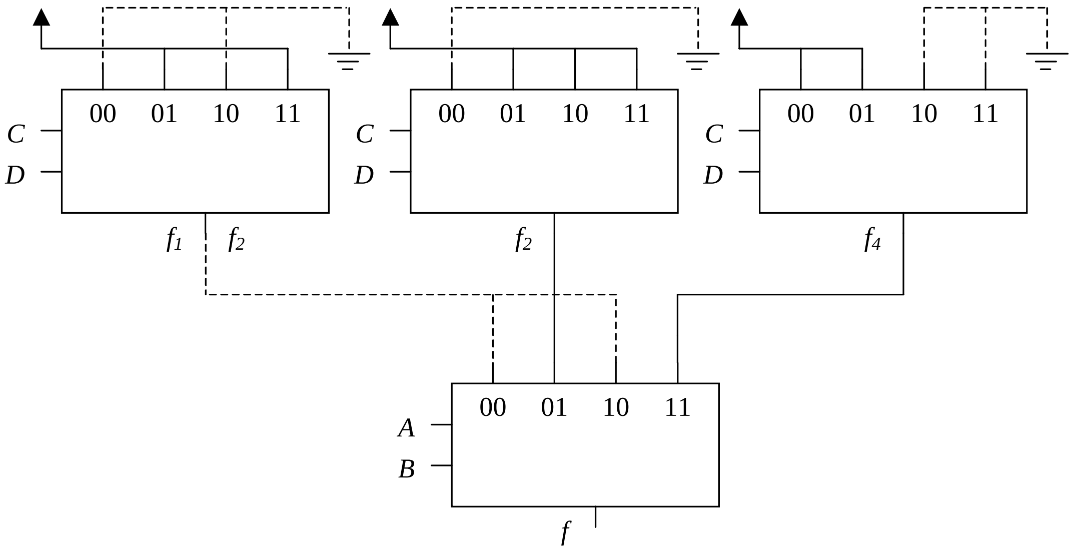


Figura F – Implementação da função *f* – 2ª versão

Quanto ao facto da unicidade da solução apresentada anteriormente, podemos facilmente concluir que esta solução não é única. Para tal, basta considerar diferentes combinações para variáveis de controlo dos multiplexers (o que obviamente altera a implementação da função). Por exemplo se partirmos o problema anterior igualmente em quatro tabelas, sendo que em cada se mantém constantes duas das variáveis anteriores, considerando como constantes agora as variáveis *C* e *D* ao invés de *A* e *B* como no caso anterior resulta em:

#	*A*	*B*	f_1
[0]	0	0	0
[4]	0	1	0
[8]	1	0	0
[12]	1	1	1

Tabela X – Tabela de verdade dado *C=0* e *D=0*

#	*A*	*B*	f_2
[1]	0	0	1
[5]	0	1	1
[9]	1	0	1
[13]	1	1	1

Tabela Y – Tabela de verdade dado *C=0* e *D=1*

#	*A*	*B*	f_3
[2]	0	0	0
[6]	0	1	1
[10]	1	0	0
[14]	1	1	0

Tabela W – Tabela de verdade dado *C=1* e *D=0*

#	*A*	*B*	f_4
[3]	0	0	1
[7]	0	1	1
[11]	1	0	1
[15]	1	1	0

Tabela Z – Tabela de verdade dado *C=1* e *D=1*

Daqui, resulta a implementação (díspar da anterior), dada por:

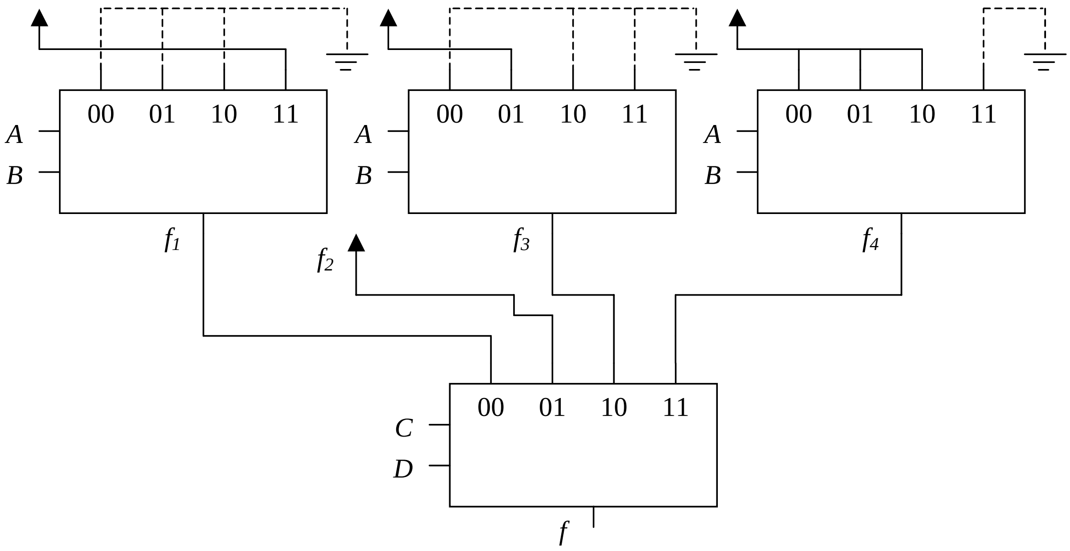


Figura Z – Implementação da função *f* – 3ª versão

Q4 – alínea a)

A tabela de verdade das funções S e T é a seguinte:

0 – 0 = 0
0 – 1 = 1 e transporte 1
1 – 0 = 1
1 – 1 = 0

X	Y	S	T
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

Mapas de Karnaugh:

y

0	1
1	0

x

S = $\overline{X}.Y + X.\overline{Y}$ = X⊕Y

y

0	1
0	0

x

T = $\overline{X}.Y$

Q4 – alínea b)

A tabela de verdade de um subtractor completo é a seguinte:

B	X	Y	S	T
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

A operação da subtracção pode ser expressa por:

X – (Y + B) (i)

X – Y – B (ii)

Podemos ter uma solução baseado na equação (i), e uma outra baseado na equação (ii).

A tabela de verdade da equação (i) é a seguinte:

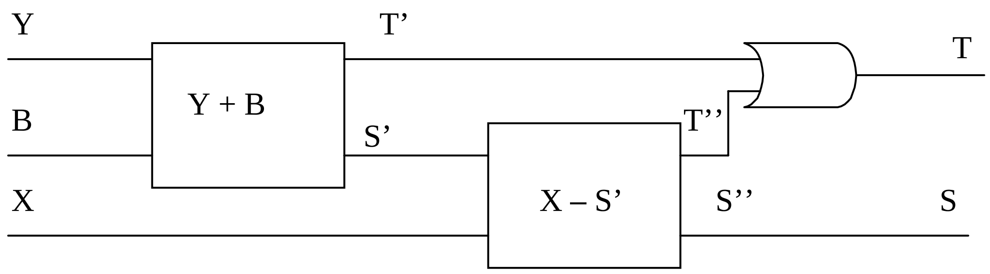
S’ = Y + B, T’ é o transporte resultante desta operação,

S’’ = X – S’ e T’’ é o transporte

B	X	Y	S’	T’	S’’	T’’	S	T
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Verifica-se que S = S’’ e T = T’ + T’’

Portanto o diagrama de blocos é o seguinte:



A tabela de verdade da equação (ii) é a seguinte:

S’ = X – Y, T’ é o transporte resultante desta operação,

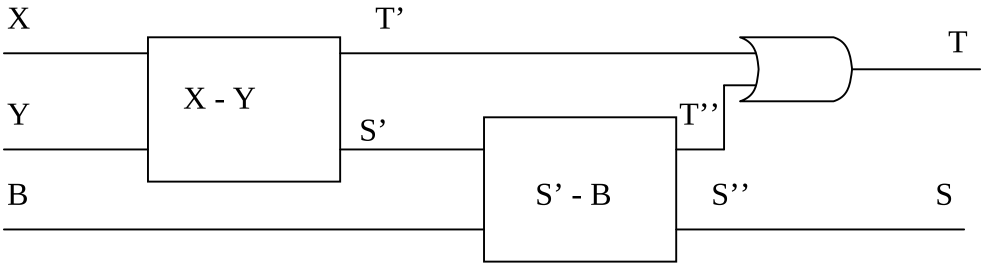
S’’ = S’ – B e T’’ é o transporte

B	X	Y	S’	T’	S’’	T’’	S	T
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1

1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1

Verifica-se que S = S’’ e T = T’ + T’’

Portanto o diagrama de blocos é o seguinte:



Q4 – alínea c)

$2^5 = 32$, portanto com 5 bits é possível codificar 32 números inteiros.

Nas representações em complemento para um e em complemento para dois, o bit mais significativo representa o sinal, sendo possível, assim, representar números negativos. Como em complemento para um o zero tem dois representações, o zero positivo e o zero negativo (00000 e 11111) o intervalo é [-15..+15].

Em complemento para dois (o zero só tem uma representação possível, o 00000) o intervalo é de [-16..+15].

Em geral com N bits podemos codificar 2^N números inteiros, em complemento para um o intervalo é $[-2^{N-1} + 1 , 2^{N-1} – 1]$ e em complemeto para dois o intervalo é $[-2^{N-1} , 2^{N-1} – 1]$

Resolução detalhada da Q3 – alínea a)

Dada a função $f(A,B,C,D,E) = \sum(2,3,7,10,12,15,27) + d(5,18,19,21,23)$, vem a representação da mesma, sob a forma de tabela de verdade, incluindo para cada mintermo, a identificação do seu cardinal. Esta tabela, tendo em vista a simplicidade de apresentação, encontra-se representada sob a forma de duas tabelas, uma para mintermos para os quais $A = 0$ e outra para aqueles em que $A = 1$. Tal representação não é requerida para a resolução da questão, visando apenas a completude e clareza desta exposição.

#	A	B	C	D	E	f
[0]	0	0	0	0	0	0
[1]	0	0	0	0	1	0
[2]	0	0	0	1	0	1
[3]	0	0	0	1	1	1
[4]	0	0	1	0	0	0
[5]	0	0	1	0	1	X
[6]	0	0	1	1	0	0
[7]	0	0	1	1	1	1
[8]	0	1	0	0	0	0
[9]	0	1	0	0	1	0
[10]	0	1	0	1	0	1
[11]	0	1	0	1	1	0
[12]	0	1	1	0	0	1
[13]	0	1	1	0	1	0
[14]	0	1	1	1	0	0
[15]	0	1	1	1	1	1

Tabela 1 – 1ª parte da tabela de verdade de *f*
para mintermos em que A=0

#	A	B	C	D	E	f
[16]	1	0	0	0	0	0
[17]	1	0	0	0	1	0
[18]	1	0	0	1	0	X
[19]	1	0	0	1	1	X
[20]	1	0	1	0	0	0
[21]	1	0	1	0	1	X
[22]	1	0	1	1	0	0
[23]	1	0	1	1	1	X
[24]	1	1	0	0	0	0
[25]	1	1	0	0	1	0
[26]	1	1	0	1	0	0
[27]	1	1	0	1	1	1
[28]	1	1	1	0	0	0
[29]	1	1	1	0	1	0
[30]	1	1	1	1	0	0
[31]	1	1	1	1	1	0

Tabela 2 – 2ª parte da tabela de verdade de *f*
para mintermos em que A=1

Partindo do principio da existência de duas formas de resolução através do método de Quine-McCluskey – a comum e a simplificada – vamos então começar pela primeira e em seguida efectuar a mesma resolução através do método simplificado.

Método de Quine-McCluskey comum

O método de Quine-McCluskey é aplicado em duas fases, uma primeira de simplificação e outra de verificação de redundância nessa mesma simplificação.

Primeira fase – Simplificação

De acordo com a definição, "no método de Quine-McCluskey procede-se a um agrupamento prévio dos mintermos presentes na função que se pretende simplificar tendo por base o número de 1s do mintermo."[1].

Por outro lado, verificamos que a função dada se encontra incompletamente especificada. Quando tal acontece, é necessário efectuar uma alteração ao método. "Essa alteração traduz-se na introdução na tabela, também dos mintermos associados aos "*don't care*" (isto é, para efeitos da determinação de todos os potenciais implicantes consideram-se os "*don't care*" como 1s)."[1].

Posto isto, vamos então proceder ao referido agrupamento, representando cada mintermo tanto pelo seu cardinal como pela sua representação binária.

	A	B	C	D	E
[2]	0	0	0	1	0
[3]	0	0	0	1	1
[5]	0	0	1	0	1
[10]	0	1	0	1	0
[12]	0	1	1	0	0
[18]	1	0	0	1	0
[7]	0	0	1	1	1
[19]	1	0	0	1	1
[21]	1	0	1	0	1
[15]	0	1	1	1	1
[23]	1	0	1	1	1
[27]	1	1	0	1	1

Tabela 3 – Agrupamento de mintermos segundo o seu número de 1s

Depois da caracterização anterior passa-se à aplicação do método propriamente dita. Assim, “a identificação de possíveis simplificações faz-se através de comparação entre todos os mintermos de um grupo com todos os mintermos do grupo seguinte; sempre que uma adjacência é identificada, os dois mintermos envolvidos são marcados e adiciona-se uma linha numa tabela complementar referindo os mintermos associados, os valores das variáveis que se mantêm constantes e um traço associado à variável que muda. Esta linha representando um produto de variáveis denomina-se por implicante.”[1]. De acordo com a definição anterior, procede-se à simplificação abaixo representada.

		A	B	C	D	E
√	[2]	0	0	0	1	0
√	[3]	0	0	0	1	1
√	[5]	0	0	1	0	1
√	[10]	0	1	0	1	0
X	[12]	0	1	1	0	0
√	[18]	1	0	0	1	0
√	[7]	0	0	1	1	1
√	[19]	1	0	0	1	1
√	[21]	1	0	1	0	1
√	[15]	0	1	1	1	1
√	[23]	1	0	1	1	1
√	[27]	1	1	0	1	1

Tabela 4 – Tabela base de simplificação para o 1º passo

$\Rightarrow$

	A	B	C	D	E
[2,3]	0	0	0	1	-
[2,10]	0	-	0	1	0
[2,18]	-	0	0	1	0
[3,7]	0	0	-	1	1
[3,19]	-	0	0	1	1
[5,7]	0	0	1	-	1
[5,21]	-	0	1	0	1
[18,19]	1	0	0	1	-
[7,15]	0	-	1	1	1
[7,23]	-	0	1	1	1
[19,23]	1	0	-	1	1
[19,27]	1	-	0	1	1
[21,23]	1	0	1	-	1

Tabela 5 – Nova tabela de simplificações para o 1º passo

A partir daqui, e devido ao carácter iterativo do método, procede-se de forma incremental, tomando como tabela base a nova tabela obtida, e passando pelos dois passos descritos anteriormente – agrupamento de mintermos baseado no número de 1s e simplificação por adjacência. O método termina quando não for possível efectuar mais simplificações. Assim, continuemos a simplificação, tomando agora a Tabela como nova tabela base.

		A	B	C	D	E
√	[2,3]	0	0	0	1	-
X	[2,10]	0	-	0	1	0
√	[2,18]	-	0	0	1	0
√	[3,7]	0	0	-	1	1
√	[3,19]	-	0	0	1	1
√	[5,7]	0	0	1	-	1
√	[5,21]	-	0	1	0	1
√	[18,19]	1	0	0	1	-
X	[7,15]	0	-	1	1	1
√	[7,23]	-	0	1	1	1
√	[19,23]	1	0	-	1	1
X	[19,27]	1	-	0	1	1
√	[21,23]	1	0	1	-	1

Tabela 6 – Tabela base de simplificação para o 2º passo

$\Rightarrow$

	A	B	C	D	E
[2,3,18,19]	-	0	0	1	-
[2,18,3,19]	-	0	0	1	-
[3,7,19,23]	-	0	-	1	1
[3,19,7,23]	-	0	-	1	1
[5,7,21,23]	-	0	1	-	1
[5,21,7,23]	-	0	1	-	1

Tabela 7 – Nova tabela de simplificações para o 2º passo

De frisar ainda que quando aparecem na tabela de simplificações implicantes iguais (onde só muda a ordem do cardinal), então elimina-se uma das linhas em questão. Tal facto acontece na Tabela , em três casos, para [2,3,18,19] e [2,18,3,19], para [3,7,19,23] e [3,19,7,23] e finalmente para [5,7,21,23] e [5,21,7,23].

		A	B	C	D	E
X	[2,3,18,19]	-	0	0	1	-
X	[3,7,19,23]	-	0	-	1	1
X	[5,7,21,23]	-	0	1	-	1

$\Rightarrow$ **(Não existe mais simplificação possível)**

Tabela 8 – Tabela base de simplificação para o 3º passo

Segunda fase – Verificação de redundância na simplificação

Depois de efectuado o processo de simplificação, entre implicantes primos (identificados com um X ao longo do processo), pode ainda existir redundância. “Importa, desta forma, complementar a técnica apresentada para identificação dos implicantes primos, com um critério para a sua selecção, que permita encontrar a solução mais simples. Baseia-se na construção de uma tabela, considerando como linhas todos os implicantes primos encontrados na primeira parte do método, e como colunas todos os mintermos pertencentes à função em análise.”[1]. Relativamente ao caso da função se encontrar incompletamente definida, é estipulado que “na segunda parte do método apenas se consideram os mintermos para os quais a função é definida como tendo o valor 1, não se incluindo portanto os mintermos associados a “*don’t care*”.”[1].Vamos então proceder à elaboração da referida tabela.

	2	3	7	10	12	15	27
[12]					×		
[2,10]	×			×			
[7,15]			×			×	
[19,27]							×
[2,3,18,19]	×	×					
[3,7,19,23]		×	×				
[5,7,21,23]			×				

Tabela 9 – Tabela de coberturas de implicantes primos

“Nessa tabela serão marcadas as coberturas de cada implicante primo em relação aos mintermos e identificados os implicantes primos que sejam únicos representantes de um mintermo, (através da localização de colunas que sejam cobertos por apenas um implicante primo). Estes implicantes primos são designados por implicantes primos essenciais e farão obrigatoriamente parte da expressão simplificada representativa da função.”[1]. Vamos então identificar na Tabela os implicantes primos essenciais.

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
	[2,3,18,19]	×	×					
	[3,7,19,23]		×	×				
	[5,7,21,23]			×				

Tabela 10 – Tabela de coberturas com implicantes primos essenciais

Tomando com base a Tabela , verificamos que os implicantes primos [12], [2,10], [7,15] e [19,27] são considerados essenciais. Assim, e numa primeira análise podemos desde já considerar redundante o implicante primo [5,7,21,23] já que este cobre o mintermo 7, que já se encontra coberto por outro implicante primo considerado essencial, nomeadamente o implicante primo [7,15]. Tomando este facto em conta, podemos refinar a Tabela , obtendo uma nova tabela.

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
	[2,3,18,19]	×	×					
	[3,7,19,23]		×	×				

Tabela 11 – Tabela de cobertura com implicantes primos essenciais e refinada

Chegando a esta tabela, deparamo-nos com um problema, sendo que o mintermo 3 não se encontra ainda coberto, existem dois implicantes primos que podem efectuar tal cobertura, respectivamente [2,3,18,19] e [3,7,19,23]. A questão é, por qual deles se deverá optar. A resposta é simples: qualquer um serve, já que esta situação representa exactamente um cenário em que a simplificação não é única, ou seja, existem duas soluções de simplificação, ambas correctas. Tomando então cada um dos dois implicantes primos, resultam as tabelas:

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
→	**[2,3,18,19]**	⊗	⊗					

Tabela 12 – Tabela de cobertura da simplificação tomando [2,3,18,19].

		2	3	7	10	12	15	27
→	**[12]**					⊗		
→	**[2,10]**	⊗			⊗			
→	**[7,15]**			⊗			⊗	
→	**[19,27]**							⊗
→	**[3,7,19,23]**		⊗	⊗				

Tabela 13 – Tabela de cobertura da simplificação tomando [3,7,19,23].

Tomando então o resultado resultante da Tabela , resulta então a simplificação dada por $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}BC\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{B}\overline{C}D$. Caso seja tomada a simplificação resultante da tomada do implicante [3,7,19,23] como essencial, vem $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}BC\overline{D}\overline{E} + \overline{A}\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}CDE + A\overline{C}DE + \overline{B}DE$.

Método de Quine-McCluskey simplificado

Relativamente ao método comum, o Quine-McCluskey simplificado apresenta quatro aspectos distintos, sendo que três deles são evidenciados na primeira fase do método e sendo o outro relativo à segunda fase do mesmo.

Primeira fase – Simplificação

Nesta fase são evidenciados aos seguintes aspectos distintos do método comum e simplificado:

“O primeiro é o de que os mintermos são representados unicamente pelo número decimal associado. A geração de um implicante ocorre sempre que a diferença entre os números representativos dos dois mintermos (ou implicantes nas tabelas seguintes à primeira) seja positiva e igual a uma potência de 2.

A segunda diferença introduzida pelo método simplificado, inclui na representação de um implicante, para além da referência dos mintermos envolvidos, a diferença verificada, entre parêntesis. Este valor da diferença tem a mesma função que o traço no método apresentado na secção anterior, permitindo seleccionar os implicantes potencialmente agrupáveis quando se comparar dois grupos de implicantes adjacentes de cada tabela.

A terceira diferença permite evitar a necessidade de eliminação de implicantes duplicados, através da representação ordenada dos mintermos de um determinado implicante."[1].

Deste modo, procedendo à elaboração do referido agrupamento, representando cada mintermo unicamente pelo seu cardinal (i.e., valor decimal).

2
3
5
10
12
18
7
19
21
15
23
27

Tabela 14 – Agrupamento de mintermos segundo o seu número de 1s

Passando de seguida ao primeiro passo de simplificação, vem:

√	2
√	3
√	5
√	10
X	12
√	18
√	7
√	19
√	21
√	15
√	23
√	27

Tabela 15 – Tabela base de simplificação para o 1º passo

$\Rightarrow$

2,3	(1)
2,10	(8)
2,18	(16)
3,7	(4)
3,19	(16)
5,7	(2)
5,21	(16)
18,19	(1)
7,15	(8)
7,23	(16)
19,23	(4)
19,27	(8)
21,23	(2)

Tabela 16 – Nova tabela de simplificações para o 1º passo

Iterando para o segundo passo, fica:

√	2,3	(1)
X	2,10	(8)
√	2,18	(16)
√	3,7	(4)
√	3,19	(16)
√	5,7	(2)
√	5,21	(16)
√	18,19	(1)
X	7,15	(8)
√	7,23	(16)
√	19,23	(4)
X	19,27	(8)
√	21,23	(2)

Tabela 17 – Tabela base de simplificação para o 2º passo

$\Rightarrow$

2,3,18,19	(1,16)
3,7,19,23	(4,16)
5,7,21,23	(2,16)

Tabela 18 – Nova tabela de simplificações para o 2º passo

E finalmente, o último passo apresenta-se como:

X	2,3,18,19	(1,16)
X	3,7,19,23	(4,16)
X	5,7,21,23	(2,16)

Tabela 19 – Tabela base de simplificação para o 3º passo

$\Rightarrow$ **(Não existe mais simplificação possível)**

Segunda fase – Verificação de redundância na simplificação

A segunda fase é idêntica àquela evidenciada na Segunda fase – Verificação de redundância na simplificação, referente ao método comum. A única diferença reside na forma como são extraídas as expressões, com base nos implicantes da tabela. Assim, "a obtenção dos números representativos de cada um dos implicantes referidos faz-se simplesmente encontrando a representação em binário do número de um dos mintermos desse implicante, anulando a dependência das variáveis (colocando um traço) correspondem a posições com o(s) peso(s) indicados dentro dos parêntesis. Esta é a quarta e última diferença em relação ao método apresentado na secção anterior."[1].

Verificação de resultados pelos mapas de Karnaugh

Podemos efectuar a verificação dos resultados obtidos pelo método de Quine-McCluskey, através dos mapas de Karnaugh, já que com 5 variáveis é ainda possível tal verificação. Caso o número de variáveis fosse superior, seria difícil efectuar a simplificação segundo o método dos mapas de Karnaugh, já que este se baseia num sistema gráfico, sendo nestes casos de pouca utilidade prática. Assim, o mapa de Karnaugh para a função $f(A,B,C,D,E)=\sum(2,3,7,10,12,15,27)+d(5,18,19,21,23)$, teria que ser particionado em dois, um para o caso $A=0$ e outro para $A=1$.

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	X	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Tabela 20 – Mapa de Karnaugh para A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	X	0	0
11	X	X	0	1
10	X	0	0	0

Tabela 21 – Mapa de Karnaugh para A=1

Utilizando uma nomenclatura que representa zonas com traço contínuo para simplificações que utilizam somente o mapa em que estão inseridas, e zonas a tracejado para simplificações que englobam os dois mapas, efectua-se então a simplificação dada por:

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	X	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Tabela 22 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	X	0	0
11	X	X	0	1
10	X	0	0	0

Tabela 23 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=1

Chegando a este ponto, deparamo-nos com o mesmo dilema de simplificação obtido no método de Quine-McCluskey, dilema este que levará à existência de duas soluções possíveis na simplificação da função em questão. A primeira representa-se por:

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	X	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Tabela 24 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=0 – Caso 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	X	0	0
11	X	X	0	1
10	X	0	0	0

Tabela 25 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=1 – Caso 1

Sendo que $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{C}\,D\,\overline{E} + \overline{A}\,C\,D\,E + A\,\overline{C}\,D\,E + \overline{B}\,D\,E$ é a expressão simplificada da função neste caso. A segunda toma a seguinte forma:

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	X	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Tabela 26 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=0 – Caso 2

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	X	0	0
11	X	X	0	1
10	X	0	0	0

Tabela 27 – Simplificação através dos mapas de Karnaugh para A=1 – Caso 2

Sendo $f(A,B,C,D,E) = \overline{A}\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{C}\,D\,\overline{E} + \overline{A}\,C\,D\,E + A\,\overline{C}\,D\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,D$ o formato da expressão simplificada para este caso.