Resolução do Teste Intermédio da UC de Teoria da Computação

12 de Dezembro de 2011

Grupo I

1. Resposta: a resposta correcta é a alínea (b) porque só os naturais de 0 a 7 podem ser resto das divisões inteiras por 8.

2. Resposta: a resposta correcta é a alínea (c) porque nesta opção, a função mapeia q em i, onde i é o maior inteiro menor que q (porque $i < q$ e não há nenhum outro inteiro m tal que $m < q$ e $m > i$). A alínea (a) está errada porque i não é um conjunto de inteiros. As alíneas (b) e (d) estão erradas porque nestas definições, i não é necessariamente o *maior* inteiro menor que q (i é apenas um inteiro menor que, ou igual a, q).

3. Resposta: a resposta correcta é a alínea (b) porque todos os inteiros que estão em s_1 também estão em s_2 e vice-versa. A alínea (a) está errada porque esta função não devolve um conjunto. A alínea (c) está errada porque podem existir inteiros em s_2 que não estão em s_1, ou seja, s_2 pode conter mais inteiros que s_1. A alínea (d) está errada porque podem existir inteiros em s_1 que não estão em s_2.

4. Resposta:

   (a) $P = \{S' \in \wp(DNA) \mid S \subseteq S'\}$.

   (b) $block \triangleq \{S \mapsto P \in \wp(DNA) \times \wp(\wp(DNA)) \mid \forall_{S' \in \wp(DNA)}\, S \cap S' = \emptyset \iff S' \in P\}$.

Grupo II

Modele o seguinte sistema com uma estrutura.
Um tesauro, também conhecido como dicionário de ideias afins, agrupa listas de palavras de acordo com similaridade do seu significado (contendo sinónimos e antónimos). Considere que cada entrada do tesauro mantém a seguinte informação: (a) a palavra, (b) um conjunto (finito) de sinónimos e (c) um conjunto (finito) de antónimos.

1. Modele o conjunto de estados de um tesauro com o conjunto STHES.

   Resposta:

$$\begin{array}{lcl} WORD & \triangleq & STRING \\ WORDS & \triangleq & \{s \in \wp(WORD) \mid \#s < \omega\} \\ ENTRY & \triangleq & WORD \times WORDS \times WORDS \\ STHES & \triangleq & \wp(ENTRY) \end{array}$$

   Também foi aceite a resposta seguinte:

$$\begin{array}{lcl} WORD & \triangleq & STRING \\ ENTRY & \triangleq & WORD \times \wp(WORD) \times \wp(WORD) \\ STHES & \triangleq & \wp(ENTRY) \end{array}$$

2. Defina (com uma função ou relação) a operação sobre STHES que adiciona uma entrada ao tesauro, assumindo que a palavra a inserir ainda não tem entrada no tesauro.

   Resposta:

$$addEntry(t, e) \;\triangleq\; t \cup \{e\}$$

3. Defina (com uma função ou relação) a operação sobre STHES que dada uma palavra retira a entrada correspondente do tesauro, se tal entrada existir. Resposta:

$$deleteEntry(t, w) \quad \triangleq \quad \{e \in t \mid \pi_1(e) \neq w\}$$

4. Defina (com uma função ou relação) a operação sobre STHES que adiciona uma entrada ao tesauro e que, se a entrada para essa palavra já existir, adiciona os conjuntos de sinónimos e antónimos à entrada já existente. Resposta:

$$\begin{array}{rcl} addEntry(t, e) & \triangleq & \{e' \in t \mid \pi_1(e') \neq \pi_1(e)\} \\ & & \cup \\ & & \{(\pi_1(e), syn, ant) \in ENTRY \mid \\ & & \quad \exists e' \in t\ \pi_1(e) = \pi_1(e') \wedge syn = \pi_2(e) \cup \pi_2(e') \wedge ant = \pi_3(e) \cup \pi_3(e')\} \\ & & \cup \\ & & \{e \in ENTRY \mid \forall e' \in t\ \pi_1(e') \neq \pi_1(e)\} \end{array}$$

5. Defina (com uma função ou relação) a operação sobre STHES que dada uma palavra, retorna o conjunto dos seus antónimos e sinónimos. Resposta:

$$\begin{array}{rcl} getInfoEntry(t, w) & \triangleq & \{(s, a) \in \wp(WORD) \times \wp(WORD) \mid \\ & & \quad \exists e \in t\ w = \pi_1(e) \wedge s = \pi_2(e) \wedge a = \pi_3(e)\} \end{array}$$

6. Defina (com uma função ou relação) a operação sobre STHES que dadas duas palavras, verifica se essas palavras estão relacionadas. Considere que duas palavras estão relacionadas se têm sinónimos comuns.

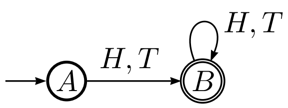
   Resposta:

$$WordsRel(t, w_1, w_2) \ \triangleq \ \begin{cases} TRUE & \exists e_1, e_2 \in t\ \pi_1(e_1) = w_1 \wedge \pi_1(e_2) = w_2 \wedge \pi_2(e_1) \cap \pi_2(e_2) \neq \emptyset \\ FALSE & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Grupo III

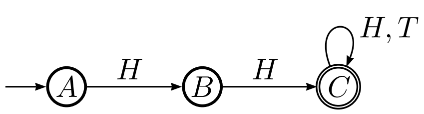
A Alice e o Bernardo, aborrecidos, decidiram inventar um jogo com base em atirar uma moeda ao ar até aparecer um determinado padrão. A moeda é atirada ao ar **consecutivamente**, e o jogo acaba quando o padrão desejado é obtido. A sua tarefa é ajudar a Alice e o Bernardo, a decidir quando é que o padrão foi atingido. Considere o alfabeto $\Sigma = \{H, T\}$, onde H corresponde a cara (Head) e T a coroa (Tail). Aqui chamamos padrão a uma sequência de jogadas.

1. Especifique um autómato finito determinista (DFA) que só aceite padrões com pelo menos uma jogada.



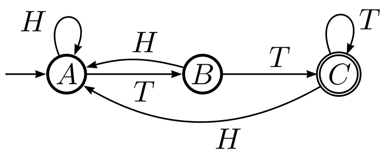
$$\begin{array}{l} A = (S, \Sigma, s, \delta, F) \\ S = \{A, B\} \\ \Sigma = \{H, T\} \\ s = A \\ \delta = \{(A, H) \mapsto B, (A, T) \mapsto B, (B, H) \mapsto B, (B, T) \mapsto B\} \\ F = \{B\} \end{array}$$

2. Especifique um DFA que só aceite padrões que comecem por HH.



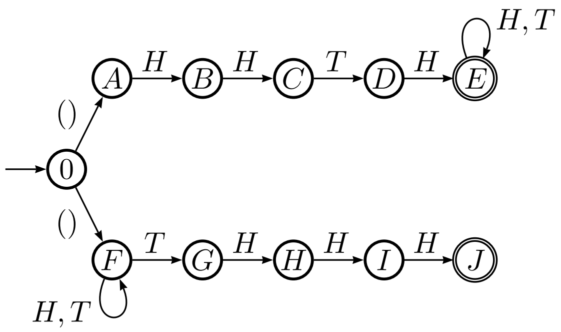
$$
\begin{aligned}
&A = (S, \Sigma, s, \delta, F) \\
&S = \{A, B, C\} \\
&\Sigma = \{H, T\} \\
&s = A \\
&\delta = \{(A, H) \mapsto B, (B, H) \mapsto C, (C, H) \mapsto C, (C, T) \mapsto C\} \\
&F = \{C\}
\end{aligned}
$$

3. Especifique um DFA que só aceite padrões que terminem em TT.



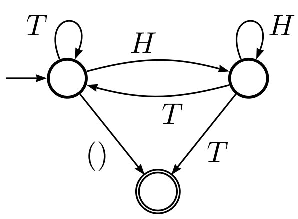
$$
\begin{aligned}
&A = (S, \Sigma, s, \delta, F) \\
&S = \{A, B, C\} \\
&\Sigma = \{H, T\} \\
&s = A \\
&\delta = \{(A, H) \mapsto A, (A, T) \mapsto B, (B, H) \mapsto A, (B, T) \mapsto C, (C, H) \mapsto A, (C, T) \mapsto C\} \\
&F = \{C\}
\end{aligned}
$$

4. Especifique um autómato finito (determinista ou não) que só aceite padrões que começam em $HHTH$ **ou** acabam em $THHH$.



$$
\begin{aligned}
&A = (S, \Sigma, s, \Delta, F) \\
&S = \{0, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\} \\
&\Sigma = \{H, T\} \\
&s = 0 \\
&\Delta = \{(0, (), A), (0, (), F), (A, H, B), (B, H, C), (C, T, D), (D, H, E), (E, H, E), \\
&(E, T, E), (F, T, F), (F, T, G), (F, H, F), (G, H, H), (H, H, I), (I, H, J)\} \\
&F = \{E, J\}
\end{aligned}
$$

5. Considere o seguinte autómato finito não-determinista:



Indique quais dos seguintes padrões são aceites pelo autómato apresentado.

(a) $()$

(b) TTT

(c) HHT

(d) TTH
(e) $TTHTHT$
(f) $HTHTTTHTTH$

Os padrões aceites são: 5a,5b,5c,5e.

Grupo IV

1. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ e a seguinte expressão regular sobre o mesmo (Recorde que $E^+ = EE^*$):

$$(ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*$$

Justifique se cada uma das seguintes 5 palavras pertencem à linguagem denotada pela expressão regular:
(a) ababbab (b) abbabcabbab (c) abbcabba (d) abbabbbab (e) abbaab

(a) $ab \in L(ab + ba); abb \in L(abb + bc); ab \in L(b + ab) \Rightarrow$
$\Rightarrow ababbab \in L((ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*)$

(b) $\{ab, ba\} \subseteq L(ab + ba); \{bc, abb\} \subseteq L(abb + bc); ab \in L(b + ab) \Rightarrow$
$\Rightarrow abbabcabbab \in L((ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*)$

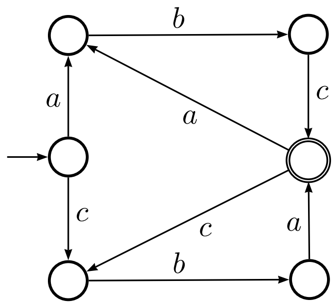
(c) $abbabcabbab \notin L((ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*)$
Como c apenas pode ser gerado pela subexpressão $(abb+bc)$, o inicio da palavra apenas pode ser gerado por $ab \in L((ab + ba)^*); bc \in L(abb + bc)$, faltando gerar $abba$. Contudo, $abba$ não pode ser gerado por $(abb + bc)^*(b + ab)^*$. Caso $abb \in L(abb + bc)$ ou $() \in (abb + bc)^*; \{ab, b\} \subseteq L((b + ab)^*)$ sobra sempre um a que não pode ser gerado por nenhuma das subexpressões.

(d) $() \in L((ab + ba)^*); \{abb, abb\} \subseteq L(abb + bc); \{b, ab\} \subseteq L(b + ab) \Rightarrow$
$\Rightarrow abbabbbab \in L((ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*)$

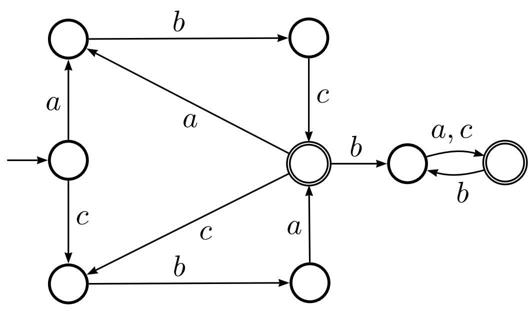
(e) $abbaab \notin L((ab + ba)^*(abb + bc)^+(b + ab)^*)$
Como a subexpressão $(abb+bc)$ tem que ser gerada pelo menos uma vez, o inicio da palavra apenas pode ser gerado por $() \in L((ab + ba)^*); abb \in L(abb + bc)$, faltando gerar aab. Contudo, aab não pode ser gerado por $(abb + bc)^*(b + ab)^*$, dado que tanto $(abb + bc)$ como $(b + ab)$ geram um b imediatamente a seguir a um a.

2. Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$:

(a) Especifique um DFA que reconheça a linguagem especificada por $(abc + cba)^+$

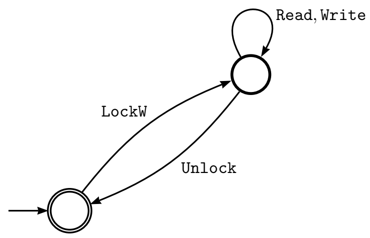


(b) Especifique um DFA que reconheça a linguagem especificada por $(abc + cba)^+(ba + bc)^*$

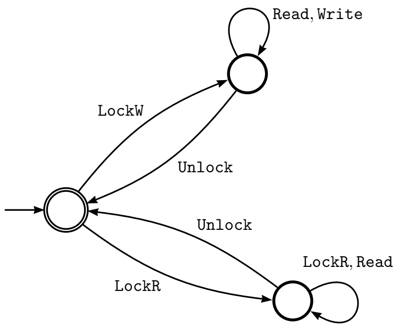


3. Considere o alfabeto $\Sigma = \{\texttt{LockW}, \texttt{LockR}, \texttt{Read}, \texttt{Write}, \texttt{Unlock}\}$, usado para definir traços do protocolo N leitores e 1 escritor, que especificam o acesso a memória partilhada por vários processos. Para cada um dos seguintes dois DFAs, proponha uma expressão regular sobre Σ que denote a linguagem por si reconhecida.

   (Não precisa de usar nenhuma técnica sofisticada para resolver este exercício: queremos basicamente avaliar se consegue perceber a linguagem reconhecida pelo autómato, e depois exprimi-la através de uma expressão regular).

   (a) 

   $(LockW(Read + Write)^*Unlock)^*$

   (b) 

   $(LockW(Read + Write)^*Unlock + LockR(Read + LockR)^*Unlock)^*$

4. Justifique se em cada um dos pares de expressões regulares representam (ou não) a mesma linguagem.

   (I) $(abb + bab)^*$ e $((ab + ba)b)^*$

$$\begin{aligned}
L(((ab+ba)b)^*) &= \{u_1...u_k \in Words(\{a,b\}) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \forall_{0<i\leq k}\, u_i \in L((ab+ba)b)\} \\
&= \{u_1b...u_kb \in Words(\{a,b\}) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \forall_{0<i\leq k}\, u_i \in L(ab+ba)\} \\
&= \{u_1...u_k \in Words(\{a,b\}) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \forall_{0<i\leq k}\, u_i \in L(abb+bab)\} \\
&= L((abb+bab)^*) \\
\therefore\ L((abb+bab)^*) &= L(((ab+ba)b)^*)
\end{aligned}$$

   (II) $(a + b)c$ e $c(a + b)$

$$\begin{aligned}
L((a+b)c) = \{ac, bc\} &\neq \{ca, cb\} = L(c(a+b)) \\
\therefore\ L((a+b)c) &\neq L(c(a+b))
\end{aligned}$$

   (III) $(b + a)(a + b)^*$ e $(a + b)^*(a + b)$

$$\begin{aligned}
L((b+a)(a+b)^*) &= \{uv \in Words(\{a,b\}) \mid u \in L(b+a) \wedge v \in L((a+b)^*)\} \\
&= \{uv \in Words(\{a,b\}) \mid u \in L(a+b) \wedge v \in L((a+b)^*)\} \\
&= \{uv_1...v_k \in Words(\{a,b\}) \mid u \in L(a+b) \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \forall_{0<i\leq k}\, v_i \in L(a+b)\} \\
&= \{v_1...v_ku \in Words(\{a,b\}) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \forall_{0<i\leq k}\, v_i \in L(a+b) \wedge u \in L(a+b)\} \\
&= \{vu \in Words(\{a,b\}) \mid v \in L((a+b)^*) \wedge u \in L(a+b)\} \\
&= L((a+b)^*(a+b)) \\
\therefore\ L((b+a)(a+b)^*) &= L((a+b)^*(a+b))
\end{aligned}$$